

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ОБ АЭРОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРЫЛА С ПОДКОСАМИ

© 1996 г. А. А. Майлышев, А. П. Сейранян

Представлено академиком Г.Г. Черным 29.06.96 г.

Поступило 30.06.96 г.

Рассматривается задача об аэроупругой устойчивости прямого крыла большого удлинения с подкосами в постановке М.В. Келдыша [1]. Подкос представляет собой абсолютно жесткий стержень, соединяющий крыло с фюзеляжем в т. P (рис. 1). Наличие подкоса означает неподвижность т. P и приводит к дополнительным граничным условиям, налагаемым на функции формы колебаний.

Для случая конкретного прямоугольного крыла с одним подкосом в центре жесткости (тип А) М.В. Келдыш произвел расчеты и сделал вывод [1], что “примерно около $h = 0.47l$ критическая скорость становится мнимой и, следовательно, при $h > 0.47l$ колебания крыла с подкосом становятся невозможными”. По-видимому, имеется в виду, что крыло становится устойчивым. Аналогичный вывод был сделан М.В. Келдышем [1] и для подкоса типа В (два подкоса, подкрепляющие сечение (h) и оставляющие его неподвижным при колебаниях): “при $h/l > 0.8$ критическая скорость крыла с подкосом типа В не существует”.

Эти выводы, сделанные М.В. Келдышем на основе одночленного приближения по Бубнову–Галеркину, оказываются ошибочными. В настоящей работе задача об аэроупругой устойчивости крыла сводится к изучению поведения собственных значений λ на комплексной плоскости для линеаризованных уравнений движения крыла в зависимости от расстояния h от основания крыла до точки крепления подкоса и скорости потока V . Таким образом определяются критические скорости колебательного (флаттер) и статического (дивергенция) типов потери устойчивости и на плоскости параметров V, h строятся области устойчивости, флаттера и дивергенции. Показано, что для подкоса типа А при $h > 0.47l$ неустойчивость типа флаттера сменяется статической формой – дивергенцией, при этом критическая скорость при $h = 0.47l$ терпит разрыв, перескакивая

со значения $V_f = 55.7$ м/с на значение $V_d = 61.3$ м/с (рис. 3). В случае подкоса типа В критическая скорость оказывается конечной и непрерывной, достигая при $h = 0.76l$ максимума $V_{kp} = 119$ м/с, превышающего критическую скорость крыла без подкоса $V_{kp} = 30.3$ м/с почти в 4 раза (рис. 4). Проведенные расчеты свидетельствуют об эффективности установки подкосов для улучшения характеристик аэроупругой устойчивости.

1. Рассмотрим колебания тонкого крыла большого удлинения, подкрепленного подкосом типа А, в воздушном потоке (рис. 1). Крыло моделируется упругой балкой, работающей на кручение и изгиб и имеющей прямую упругую ось $0y$ (ось жесткости), перпендикулярную фюзеляжу. Деформация крыла характеризуется прогибом $z(y, \tau)$ и углом поворота относительно упругой оси $\theta(y, \tau)$, где τ – время. Линеаризованные уравнения движения крыла в потоке имеют вид [2, 3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} &= L_a, \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - m\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} &= M_a. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях EI и GJ – жесткости крыла на изгиб и кручение, m и I_m – масса и момент инерции относительно упругой оси, приходящиеся на единицу размаха, σ – расстояние от центра жесткости до центра тяжести сечения. Аэродинамические силы L_a и момент M_a на единицу размаха

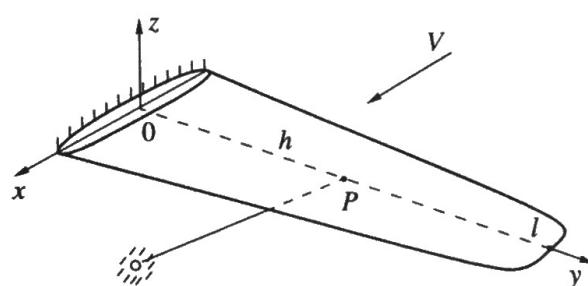


Рис. 1.

определяются на основании гипотезы стационарности [2, 3]. Выражения для L_a и M_a записываются в виде

$$\begin{aligned} L_a &= C_y^\alpha \rho V^2 t \left[\theta + \frac{t}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right], \\ M_a &= C_m^\alpha \rho V^2 t^2 \left[\theta + \frac{t}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где t – хорда крыла, x_0 – расстояние от передней кромки до упругой оси, V – скорость потока, ρ – плотность воздуха, C_y^α и C_m^α – аэродинамические коэффициенты.

Рассматривая случай жесткого крепления крыла к фюзеляжу, выпишем граничные условия, наложенные на функции z и θ при $y = 0$ (жесткое защемление) и $y = l$ (свободный край):

$$\begin{aligned} y = 0: \quad z = \frac{\partial z}{\partial y} = \theta = 0; \\ y = l: \quad EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из предположения, что крыло подкреплено подкосом в т. P , лежащей на упругой оси, и условий непрерывности угла кручения, производной от прогиба, а также крутящего и изгибающего моментов в сечении h имеем [1]

$$\begin{aligned} y = h: \quad z_- = z_+ = 0, \quad \theta_- = \theta_+, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_- = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_+, \\ \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_- = \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_+, \quad \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_- = \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_+. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (1)–(4) представляет собой линейную однородную краевую задачу. Решение уравнений (1)–(4) ищем в виде

$$z(y, \tau) = f(y)e^{\lambda \tau}, \quad \theta(y, \tau) = g(y)e^{\lambda \tau}, \quad (5)$$

где λ – собственное значение, $f(y)$, $g(y)$ – собственные функции. Подставляя (5) в (1)–(4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f(y)$, $g(y)$ вида

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где L_{ij} – линейные дифференциальные операторы, зависящие от λ . Граничные условия для функций f и g совпадают с (3), (4) с точностью до замены z и θ на f и g .

В силу неконсервативности (несамосопряженности) задачи собственные значения λ , вообще говоря, – комплексные величины $\lambda = \alpha + i\omega$. В зависимости от скорости потока V амплитуды ре-

шений (5) могут убывать с течением времени ($\text{Re}\lambda < 0$, устойчивость), оставаться постоянными ($\text{Re}\lambda = 0$, граница устойчивости) либо возрастать ($\text{Re}\lambda > 0$, неустойчивость). Критическая скорость флаттера V_f характеризуется соотношениями $\text{Re}\lambda = 0$, $\text{Im}\lambda = \omega \neq 0$, где ω – частота флаттера, а критическая скорость дивергенции V_d – равенством $\lambda = 0$. Критическая скорость потери устойчивости системы V_{kp} равна наименьшей из скоростей V_f и V_d .

Для решения задачи на собственные значения (6) воспользуемся методом Бубнова–Галеркина [4]. С этой целью выберем две системы линейно независимых координатных функций f_1, \dots, f_n и g_1, \dots, g_n , соответственно четырежды и дважды непрерывно дифференцируемых в интервалах $(0, h)$ и (h, l) и удовлетворяющих граничным условиям задачи. Согласно методу Бубнова–Галеркина, собственные функции f и g системы (6) представляются в виде линейных комбинаций координатных функций с неизвестными коэффициентами α_i и β_i соответственно:

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(y), \quad g(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i g_i(y). \quad (7)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (6), а затем умножая левые части этих уравнений соответственно на f_j и g_j ($j = 1, \dots, n$) и интегрируя по y от 0 до l , получим $2n$ линейных однородных уравнений относительно коэффициентов α_i и β_i , которые представляют собой алгебраическую задачу на собственные значения вида

$$[\lambda^2 M + \lambda V C + K + V^2 D] \xi = 0, \quad (8)$$

где ξ – вектор-столбец, состоящий из неизвестных коэффициентов $\xi^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, а M , C , K , D – квадратные матрицы порядка $2n$. В силу однородности задачи (8) нетривиальное решение ξ существует лишь при условии

$$\det[\lambda^2 M + \lambda V C + K + V^2 D] = 0. \quad (9)$$

Это уравнение служит для определения собственных значений λ в зависимости от скорости потока V .

2. С использованием описанного метода была исследована устойчивость прямоугольного крыла с подкосом типа А в зависимости от параметров. Расчетные данные, следуя М.В. Келдышу, были взяты из [5]. Разложения (7) производились по 5–7 функциям, в качестве которых были выбраны собственные формы чистого изгиба и кручения крыла с подкосом в пустоте.

На рис. 2 представлены траектории движения собственных значений на комплексной плоскости при изменении скорости V от 0 до 155 м/с для некоторых характерных значений h . Стрелки на

рис. 2 соответствуют увеличению скорости. Поскольку матрицы в уравнении (9) действительны, собственные значения располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси. Неизображенные ветви, соответствующие высшим тонам, как показали расчеты, при всех h лежат в левой полуплоскости, т.е. устойчивы. Цифры у мнимой оси указывают значения критической скорости соответствующего тона.

При малых h потеря устойчивости происходит по первому, второму и четвертому тонам (рис. 2а). Первый тон – дивергентный: два сопряженных собственных значения сближаются, сталкиваются и расходятся в разные стороны по действительной оси. Один из них пересекает мнимую ось при скорости $V_d = 61.3$ м/с. Второй и четвертый тона флаттерные: собственные значения этих тонов пересекают мнимую ось в точках $\text{Im}\lambda \neq 0$ при V_f , равной 28 м/с и 128 м/с соответственно. Таким образом, критическим является второй тон. Как видно из рис. 2а, ветвь второго тона пересекает мнимую ось дважды. Это означает, что этот тон вновь становится устойчивым, начиная с некоторого значения скорости.

При увеличении h наблюдаются следующие изменения (рис. 2б): четвертый тон становится устойчивым, а третий – неустойчивым ($V_f = 147$ м/с). Ветвь второго тона сдвигается влево. Критической скоростью является, как и в первом случае, скорость флаттера второго тона. С дальнейшим ростом h ветвь второго тона продолжает вытягиваться в сторону левой полуплоскости до касания мнимой оси при $h = 0.471l$ (рис. 2в) и выпрямления (рис. 2г). Ветвь, соответствующая третьему тону, напротив, уходит вправо, при этом V_f снижается с 135 м/с при $h = 0.471l$ до 72 м/с при $h = 0.8l$. Критической скоростью, начиная со значения $h = 0.471l$, соответствующего уходу ветви второго тона в область $\text{Re}\lambda < 0$ (устойчивость), становится скорость дивергенции первого тона $V_d = 61.3$ м/с.

При значениях $h = 0.145l$ и $h = 0.935l$ была обнаружена смена неустойчивого тона, связанная с появлением кратного λ . Это явление для линейных колебательных систем, зависящих от многих параметров, описано в [6]: два собственных значения сближаются на комплексной плоскости, сталкиваются (точка двухкратного λ) и расходятся под прямым углом к линии сближения. В данном случае при $h = 0.145l$ “взаимодействуют” четвертый и пятый тона, а при $h = 0.935l$ – второй и третий.

В результате расчетов было получено следующее расположение областей устойчивости, флаттера и дивергенции на плоскости параметров V и h (рис. 3). Горизонтальными линиями заштрихована область флаттера, а вертикальными – дивергенции. Числа указывают на номер тона, который становится неустойчивым при переходе через соответствующую границу.

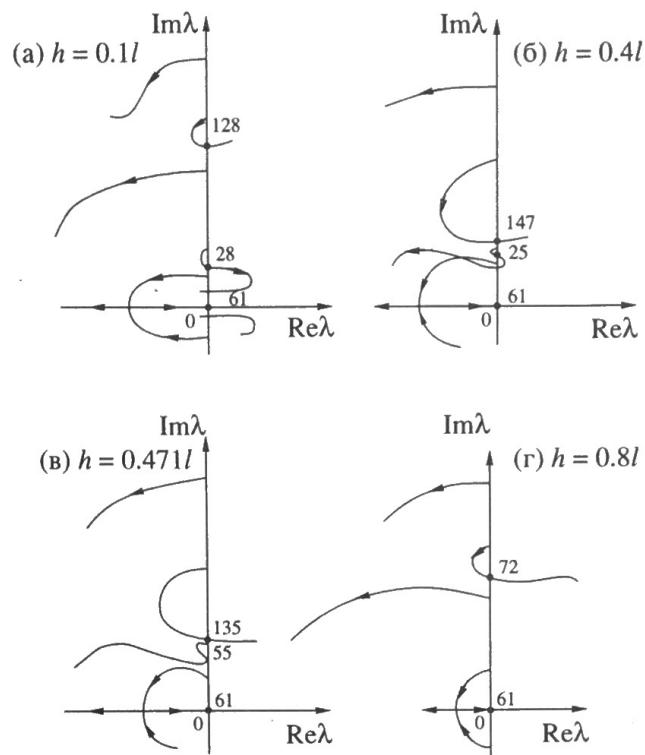


Рис. 2.

Область флаттера выпукла при $h \leq 0.471l$ и имеет вертикальную касательную $h = 0.471l$. Области флаттера и дивергенции, пересекаясь, образуют острый угол φ в области устойчивости. Это означает разрыв критической скорости при $h = 0.471l$ и наличие малой области устойчивости при $V > V_{kp}$ на интервале $0.471l < h < 0.471l$ (рис. 3). Разрыв происходит при уходе ветви второго (критического) тона в устойчивую полуплоскость $\text{Re}\lambda < 0$, причем точка разрыва отвечает касанию ветви критического тона мнимой оси при $h = 0.471l$, при этом $V_f = 55.7$ м/с (рис. 2в).

Заметим, что описанное выше явление смены неустойчивого тона сопровождается разрывом критических скоростей “взаимодействующих” тонов, но не приводит к особенностям границы области флаттера.

Сравнивая полученные результаты с результатами М.В. Келдыша [1, фиг. 4], приходим к выводу об удовлетворительном их согласии при $h < 0.471l$. Но при $h > 0.471l$ критическая скорость не пропадает, как в [1], а терпит разрыв и становится равной скорости дивергенции. Неустойчивость типа дивергенции не исследовалась М.В. Келдышем. Критическая скорость дивергенции при креплении подкоса к упругой оси крыла не зависит от h и для прямоугольного крыла оценивается аналитически

$$V_d = \frac{\pi(GJ/(C_m^a \rho))^{1/2}}{2lt} = 61.3 \text{ м/с.}$$

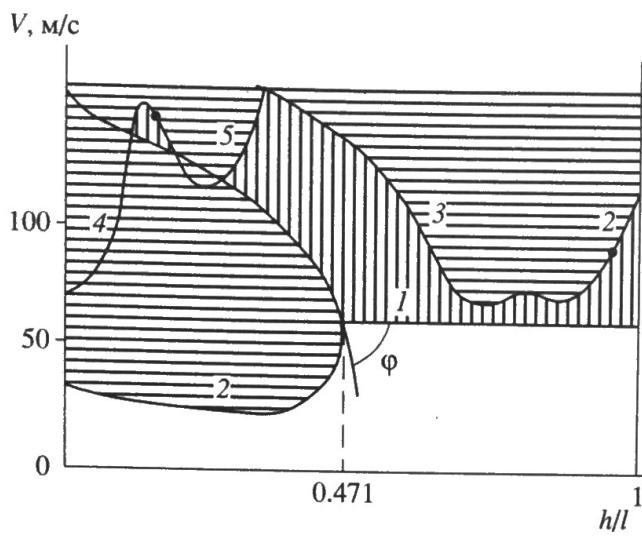


Рис. 3.

Заметим, что при $h > 0.471l$ существует и область флаттера, заштрихованная на рис. 3 горизонтальными линиями.

3. Исследуем устойчивость крыла, подкрепленного подкосом типа В, фиксирующим сечение h . Границные условия для этого случая принимают вид [1]

$$y = h: z_- = z_+ = 0, \theta_- = \theta_+ = 0, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_- = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_+, \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_- = \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_+. \quad (10)$$

Для прямоугольного крыла [5] были проведены расчеты критической скорости, результаты которых приведены на рис. 4. Оказалось, что при любом положении подкоса $0 \leq h \leq l$ крыло теряет устойчивость по флаттеру: при $0 \leq h \leq 0.65l$ и $0.74l \leq h \leq l$ устойчивость теряется по второму тону, а при $0.65l \leq h \leq 0.74l$ – по третьему тону. В точках $h = 0.65l$ и $h = 0.74l$ происходит смена критического тона. При увеличении h от нуля критическая скорость флаттера возрастает, достигая максимума при $h = 0.76l$, а затем монотонно убывает (рис. 4). Максимум критической скорости составляет $V_f = 119$ м/с, что почти в 4 раза

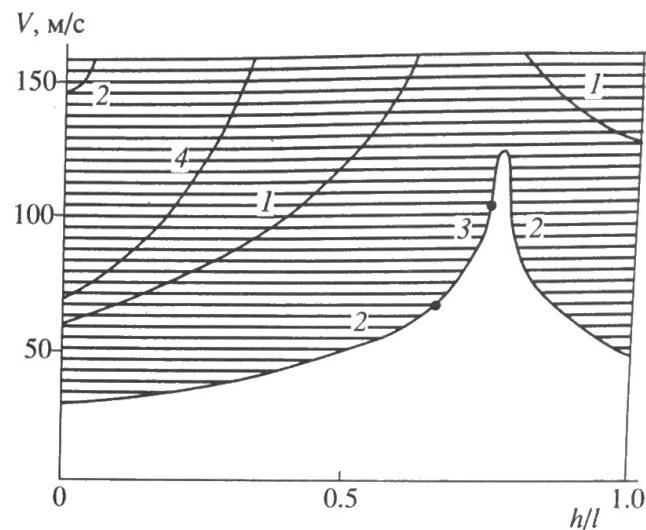


Рис. 4.

превышает критическую скорость крыла без подкоса.

Сравнение с расчетами М.В. Келдыша [1, рис. 8] свидетельствует об удовлетворительном согласии результатов при $0 \leq h \leq 0.7l$, однако при $h > 0.7l$ результаты не совпадают, и вывод о том, что “при $h > 0.8l$ крыло становится невибрирующим” [1], не подтверждается.

Полученные результаты свидетельствуют об эффективности установки подкосов, в особенности типа В, для улучшения характеристик аэроупругой устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М.В. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 304–341.
2. Гроссман Е.П. // Тр. ЦАГИ. 1937. В. 284. 247 с.
3. Файн Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959. 523 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. Гроссман Е.П., Кричевский С.С., Борин А.А. // Тр. ЦАГИ. В. 202. 1935. 62 с.
6. Сейранян А.П. // ПММ. 1994. Т. 58. В. 5. С. 49–58.