

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

© 1998 г. А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян

Представлено академиком А.Б. Куржанским 21.02.97 г.

Поступило 24.02.97 г.

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений $\dot{y} = Ay$, где матричный оператор A гладко зависит от вещественных параметров. В работе [1] перечислены особенности общего положения, возникающие на границах областей устойчивости в двух- и трехмерном пространстве параметров, и дано их описание с точностью до гладкой замены параметров (диффеоморфизма). В настоящем сообщении предлагается конструктивный подход, позволяющий определить геометрию особенностей (касательные конусы к области устойчивости, величины углов и т.п.) по первым производным матрицы A по параметрам и ее собственным и присоединенным векторам в особых точках границы. Метод основан на теории возмущений собственных значений матриц, зависящих от параметров [2, 3], и теории нормальных форм матриц [1]. Приведены примеры физических систем.

1. Рассмотрим задачу на собственные значения $Au = \lambda u$, где A – произвольная вещественная матрица порядка $m \times m$, гладко зависящая от вектора действительных параметров $p = (p_1, \dots, p_n)^T$, λ – собственное значение, u – собственный вектор размерности m .

Пусть при $p = p_0$ число λ_0 является собственным значением матрицы $A_0 = A(p_0)$. Придадим вектору параметров приращение

$$p = p_0 + e\epsilon + d(\epsilon)\epsilon^2,$$

где ϵ – малое положительное число, e и $d(\epsilon)$ – соответственно произвольные, но фиксированные вектор направления и вектор-функция, гладко зависящая от ϵ . В результате возмущения вектора параметров собственное значение получит приращение, которое в случае простого собственного значения λ_0 представляется в виде [2, 3]

$$\lambda = \lambda_0 + [(r, e) + i(k, e)]\epsilon + o(\epsilon), \quad (1)$$

где векторы r и k определяются соотношениями

$$r^s + ik^s = \frac{v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0}{v_0^T u_0}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Скобки в (1) обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^n , u_0, v_0 – правый и левый собственные векторы при $p = p_0$: $A_0 u_0 = \lambda_0 u_0$, $v_0^T A_0 = \lambda_0 v_0^T$.

В случае двукратного λ_0 с жордановой клеткой второго порядка собственному значению λ_0 отвечают левые и правые собственные и присоединенные векторы u_0, u_1, v_0, v_1 . Считая векторы u_0 и u_1 фиксированными, введем следующую нормировку векторов v_0, v_1 : $v_0^T u_1 = 1, v_1^T u_1 = 0$.

В результате возмущения вектора параметров в кратном случае собственное значение, вообще говоря, распадается на l простых собственных значений, которые представляются в виде рядов Ньютона–Плюизо, содержащих члены с дробными степенями $\epsilon^{j/l}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, где l – длина цепочки Жордана [2]. В случае $l = 2$ расщепление двукратного собственного значения λ_0 представляется в виде

$$\lambda = \lambda_0 \pm \sqrt{[(f_1, e) + i(q_1, e)]\epsilon} + [(f_2, e) + i(q_2, e)]\epsilon + o(\epsilon), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_1^s + iq_1^s &= v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0, \quad s = 1, \dots, n, \\ f_2^s + iq_2^s &= \frac{1}{2} \left(v_0^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_1^T \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В случае трехкратного λ_0 с жордановой клеткой третьего порядка собственному значению λ_0 отвечают правые и левые собственные и присоединенные векторы $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2$. Считая векторы u_0, u_1, u_2 фиксированными, используем следующую нормировку: $v_0^T u_2 = 1, v_1^T u_2 = v_2^T u_2 = 0$.

Распад λ_0 на три простых собственных значения описывается выражением

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \sqrt[3]{[(h_1, e) + i(t_1, e)]\varepsilon} + \\ &+ \frac{(h_2, e) + i(t_2, e)}{3\sqrt[3]{(h_1, e) + i(t_1, e)}}\varepsilon^{2/3} + \\ &+ \frac{1}{3}[(h_3, e) + i(t_3, e)]\varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} h_1^s + it_1^s &= v_0^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0, \quad h_2^s + it_2^s = \\ &= \left(v_0^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_1^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right), \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

$$h_3^s + it_3^s = \left(v_0^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_2 + v_1^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_1 + v_2^\top \frac{\partial A}{\partial p_s} u_0 \right).$$

Кубические корни во втором и третьем членах (5) одинаковы и принимают три различных комплексных значения.

Соотношения (3), (4) и (5), (6) справедливы, если $v_0^\top A_1 u_0 \neq 0$ (условие Г в [2]). Если λ_0 – действительное число, то векторы $k, q_1, q_2, t_1, t_2, t_3$ в формулах (1), (3), (5) нулевые.

2. Рассмотрим линейную автономную систему дифференциальных уравнений $\dot{y} = Ay$. Тривиальное решение системы $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво, если действительные части всех собственных значений матрицы A отрицательны. Если существует хотя бы одно собственное значение λ , для которого $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то система неустойчива. Случай, когда для некоторых собственных значений $\operatorname{Re}\lambda = 0$, а для всех остальных $\operatorname{Re}\lambda < 0$, отвечает границе области устойчивости.

При рассмотрении общего двухпараметрического семейства вещественных матриц $A(p)$, $p \in \mathbb{R}^2$, граница области устойчивости состоит из гладких кривых, характеризуемых одним простым собственным значением $\lambda = 0$ или парой простых чисто мнимых чисел $\lambda = \pm i\omega$ и пересекающихся трансверсально в своих концевых точках. Вектор нормали к кривой r , лежащий в области неустойчивости, определяется соотношением (2), где векторы u_0, v_0 соответствуют $\lambda_0 = 0$ или $\lambda_0 = \pm i\omega$. В точках излома границы матрица A характеризуется следующими жордановыми структурами (стратами): $F_1(0^2), F_2(0, \pm i\omega), F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$. В скобках перечисляются собственные значения, лежащие на мнимой оси, а показатель степени обозначает величину соответствующей жордановой клетки. Например, 0^2 означает двукратный нуль с жордановой клеткой второго порядка [1].

Касательным конусом к области устойчивости в точках ее границы называется множество на-

правлений векторов, по которым из данной точки можно выпустить кривую, лежащую, за исключением начальной точки, в области устойчивости [4]. Таким образом, касательный конус является первым приближением к области устойчивости в окрестности особой точки. Конус называется невырожденным, если он вы секает на сфере множество ненулевой меры.

Используя разложения (1), (3), получим выражения для касательных конусов $K_{F_1}, K_{F_2}, K_{F_3}$ в точках границы области устойчивости, соответствующих стратам $F_1(0^2), F_2(0, \pm i\omega), F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$:

$$K_{F_1} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0\}, \quad (7)$$

$$K_{F_2} = \{e: (r_0, e) \leq 0, (r, e) \leq 0\}, \quad (8)$$

$$K_{F_3} = \{e: (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0\}, \quad (9)$$

где векторы f_1 и f_2 соответствуют двукратному нулю и вычисляются с помощью (4), векторы r_0, r, r_1, r_2 соответствуют простым собственным значениям $0, \pm i\omega, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ соответственно и определяются из (2). В случае общего положения векторы f_1 и f_2 , r_0 и r , а также r_1 и r_2 линейно независимы.

Согласно (7)–(9), область устойчивости в особых точках F_1, F_2, F_3 вклинивается в область неустойчивости, причем угол раскрытия клина меньше π . Этот факт отражает известный принцип “хрупкости хорошего” [1, 5] и свойство квазивыпуклости области устойчивости [4].

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости состояния равновесия в цепи вольтовой дуги, включенной последовательно с сопротивлением R , самоиндукцией L и зашунтированной емкостью C [6]. Линеаризованные дифференциальные уравнения системы имеют вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\rho\xi}{L} + \frac{\eta}{L}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\xi}{C} - \frac{\eta}{RC}, \quad (10)$$

где $\xi(t), \eta(t)$ – ток и напряжение на вольтовой дуге, а ρ – сопротивление дуги. Полагая параметры L и C фиксированными, исследуем устойчивость системы (10) на плоскости параметров R и ρ . В точке $R = \sqrt{LC}$, $\rho = -\sqrt{LC}$ характеристическое уравнение (10) имеет двукратный нуль $\lambda_0 = 0$, которому отвечает жорданова клетка второго порядка. Вычислим векторы f_1 и f_2 согласно (4):

$$f_1 = -\frac{1}{L\sqrt{LC}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{2L} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Используя (11), с помощью соотношения (7) найдем касательный конус к области устойчивости в точке $R = \sqrt{LC}$, $\rho = -\sqrt{LC}$. Угол раскрытия

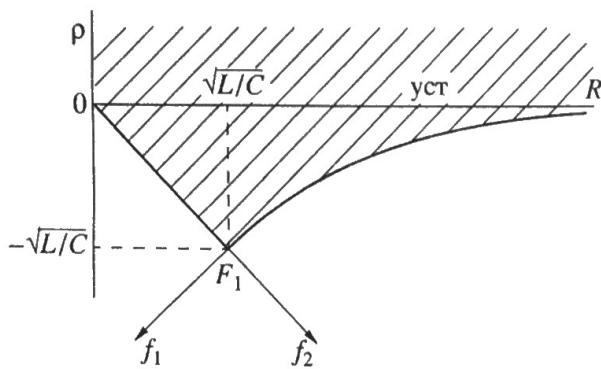


Рис. 1.

этого конуса равен $\pi/2$, так как векторы f_1 и f_2 ортогональны (рис. 1). Этот результат согласуется с [6].

3. Рассмотрим гладкое трехпараметрическое семейство вещественных матриц $A(p)$, $p \in \mathbb{R}^3$, общего положения. Граница области устойчивости в трехмерном пространстве является гладкой поверхностью, имеющей согласно [1] особенности: “двугранный угол”, “трехгранный угол”, “тупик на ребре” и “излом ребра” (рис. 2). Нормаль к поверхности r находится из (2), как и в двухпараметрическом случае.

Особенность типа “двугранный угол” связана со стратами $F_1(0^2)$, $F_2(0, \pm i\omega)$ и $F_3(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$, рассмотренными в п. 2. Поэтому касательные кону-

сы к области устойчивости для этих особенностей определяются соотношениями (7)–(9). Определим векторы g_i , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям $(g_i, f_j) = -\delta_{ij}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, где δ_{ij} – символ Кронекера, f_1, f_2 – векторы, определяющие K_{F_1} в (7). Вектор g_3 направлен по ребру “двугранного угла”, а векторы g_1 и g_2 касательны к граням этого угла (рис. 2). Такие векторы для особенностей F_2, F_3 можно определить используя вместо f_1, f_2 векторы r_0, r и r_1, r_2 из (8), (9) соответственно.

Особенность типа “трехгранный угол” характеризуется стратами: $G_3(0^2, \pm i\omega)$, $G_4(0, \pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$, $G_5(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3)$ [1]. Касательные конусы к области устойчивости для этих случаев записываются в виде

$$K_{G_3} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0, (r, e) \leq 0\}, \quad (12)$$

$$K_{G_4} = \{e: (r_0, e) \leq 0, (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0\}, \quad (13)$$

$$K_{G_5} = \{e: (r_1, e) \leq 0, (r_2, e) \leq 0, (r_3, e) \leq 0\}, \quad (14)$$

где векторы r_0, r и r_i , $i = 1, 2, 3$, соответствуют простым собственным значениям $0, \pm i\omega$ и $\pm i\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, и определяются из (2), а векторы f_1 и f_2 соответствуют двукратному нулю с жордановой клеткой второго порядка и находятся из (4). По трем векторам, определяющим трехгранный угол, например r_1, r_2, r_3 в K_{G_5} , можно определить векторы g_1, g_2, g_3 , удовлетворяющие условиям

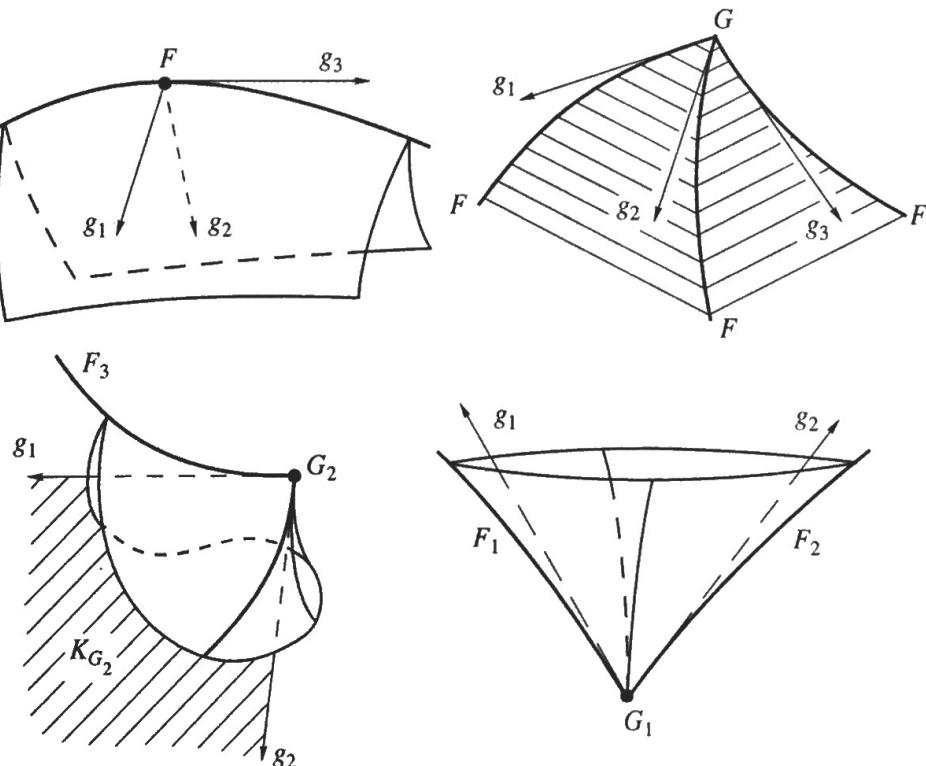


Рис. 2.

$(g_i, r_j) = -\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, касательные к граням трехгранного угла (рис. 2).

Особенность “тупик на ребре” характеризуется стратом $G_2((\pm i\omega)^2)$. Соответствующий касательный конус имеет вид

$$K_{G2} = \{e: (f_1, e) \leq 0, (f_2, e) \leq 0, (q_1, e) = 0\}, \quad (15)$$

где векторы f_1, f_2, q_1 отвечают двукратному собственному значению $i\omega$ и определяются из (4). Векторы g_1, g_2 , удовлетворяющие условиям $(g_i, f_j) = -\delta_{ij}$, $(g_i, q_1) = 0$, $i, j = 1, 2$, направлены по сторонам плоского угла K_{G2} , причем g_1 является касательным вектором к ребру F_3 области устойчивости (рис. 2).

Особенность “излом ребра” характеризуется стратом $G_1(0^3)$. Используя версальную деформацию матрицы A [1], для касательного конуса K_{G1} можно получить

$$K_{G1} = \{e: (h_1, e) = 0, (h_2, e) \leq 0, (h_3, e) \leq 0\}, \quad (16)$$

где векторы h_1, h_2, h_3 соответствуют трехкратному нулю и определяются из (6). Конус K_{G1} вырожден и является плоским углом. Векторы g_1, g_2 , определенные по формулам $(g_i, h_{4-j}) = -\delta_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, касаются ребер в точке G_1 (рис. 2). Отметим, что векторы, определяющие касательные конусы (12)–(16), в случае общего положения линейно независимы. Касательный конус K_{G1} лежит в плоскости, в которой разложение (5) трехкратного нуля по степеням $\varepsilon^{1/3}$ несправедливо, так как в ней $v_0^T A_1 u_0 = (h_1, e) = 0$. Поэтому для определения касательного конуса K_{G1} в этом случае применялся подход, связанный с методом нормальных форм.

В качестве примера рассмотрим двойной маятник Циглера с двумя независимыми параметрами диссипации [7]. Линеаризованные уравнения колебаний маятника около положения равновесия $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} 3\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\dot{\phi}_1 - \gamma_2\dot{\phi}_2 + \\ + (2 - P)\phi_1 + (P - 1)\phi_2 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 - \gamma_2\dot{\phi}_1 + \gamma_2\dot{\phi}_2 - \phi_1 + \phi_2 = 0,$$

где использованы безразмерные величины: параметры диссипации γ_1, γ_2 , следящая сила P и время τ . Введя переменные $u^T = (\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$, уравнения (17) можно записать в виде $\dot{u} = Ay$.

Исследуем особенности границы области устойчивости системы (17) в пространстве трех параметров $p = (\gamma_1, \gamma_2, P)$. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} 2\lambda^4 + (\gamma_1 + 6\gamma_2)\lambda^3 + (7 - 2P + \gamma_1\gamma_2)\lambda^2 + \\ + (\gamma_1 + \gamma_2)\lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

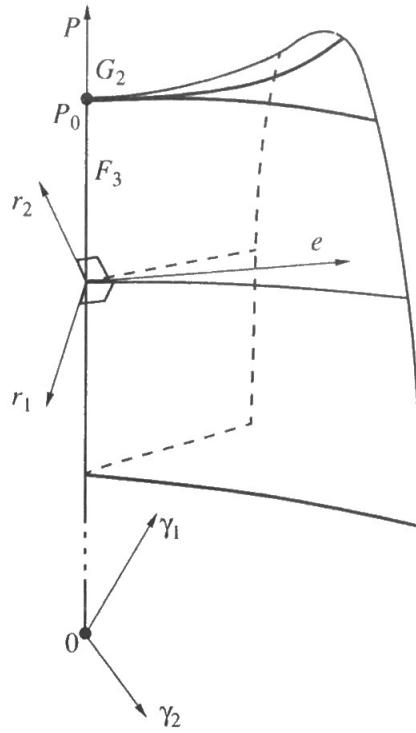


Рис. 3.

При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $P \in [0, 7/2 - \sqrt{2}]$ имеются две различные пары простых комплексно-сопряженных мнимых собственных значений, что соответствует особенности “двугранный угол” (F_3). Значению $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $P_0 = 7/2 - \sqrt{2}$ отвечает пара комплексно-сопряженных мнимых собственных значений с жордановой клеткой второго порядка, что означает особенность “тупик на ребре” (G_2). Таким образом, отрезок $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $P \in [0, P_0]$ является ребром границы области устойчивости с тупиком в точке $P = P_0$ (рис. 3).

В точке $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $P \in [0, P_0]$ касательный конус $K_{F3}(P)$ определяется из (9). Векторы r_1 и r_2 , вычисленные по формулам (2), имеют вид

$$r_{1,2}(P) = \frac{1}{8} \begin{cases} \pm \frac{3/2 - P}{\sqrt{(P - 7/2)^2 - 2}} - 1 \\ \pm \frac{19 - 6P}{\sqrt{(P - 7/2)^2 - 2}} - 6 \\ 0 \end{cases}.$$

При увеличении P от нуля угол между векторами r_1 и r_2 (равный разности π и величины угла раскрытия двугранного угла) увеличивается и при $P = P_0$ становится равным π . Таким образом, касательный конус вырождается, переходя в конус K_{G2} “тупика на ребре” в точке $P = P_0$. Конус K_{G2} определен в (15), где векторы f_1, q_1, f_2

вычисляются по формулам (4) и с точностью до положительного множителя равны $f_1 = (0, 0, 1)$, $q_1 = (1, -4 - 5\sqrt{2}, 0)$, $f_2 = (-1, -6, 0)$. Этот конус можно записать в виде

$$K_{G2} = \{(e_1, e_2, e_3):$$

$$e_1 = (4 + 5\sqrt{2})e_2, \quad e_2 \geq 0, \quad e_3 \leq 0\}.$$

В пространстве параметров (γ_1, γ_2, P) он является плоским углом.

Смыкание “двугранного угла” в точке особенности G_2 “тупик на ребре” иллюстрирует явление дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами [7]. Следует ожидать проявления подобных эффектов и для других систем с особенностями границы области устойчивости типа “тупик на ребре” и “излом ребра”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. // УМН. 1960. Т. 15. В. 3(93). С. 3–80.
3. Seyranian A.P. // Mech. Struct. and Machines. 1993. V. 21. № 2. P. 261–284.
4. Левантовский Л.В. // УМН. 1980. Т. 35. В. 2. С. 213–214.
5. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
7. Herrmann G., Jong I.-C. // Trans. ASMEE. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. P. 592–597.