$\tilde{G}$ является C^∞-отображением $\partial D^k \times \partial D^l$ в $\mathbf{R}^{m+n} \setminus \{0\}$, для которого $\tilde{G}(Z)$, где $Z \in \partial D^k \times \partial D^l$, не лежит в образе касательной плоскости в точке Z при отображении G ($\notin G_*\mathbf{T}_Z(\partial D^k \times \partial D^l)$), а $\tilde{g}$ — C^∞-отображение ∂D^k в $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$, такое, что $\tilde{g}(y)$, где $y \in \partial D^k$, не лежит в образе касательной плоскости в точке y при отображении g ($\notin g_*\mathbf{T}_y(\partial D^k)$), причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \partial D^k \times \partial D^l & \xrightarrow{\tilde{G}} & \mathbf{R}^{m+n} \setminus \{0\} & \subset & \mathbf{R}^{m+n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \partial D^k & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbf{R}^m \setminus \{0\} & \subset & \mathbf{R}^m. \end{array}$$

Далее, отображение $\bar{G}$ является таким C^∞-отображением $\partial D^k \times \partial D^l$ в $\mathbf{R}^{m+n} \setminus \{0\}$, что $\bar{G}(Z)$, где $Z \in \partial D^k \times \partial D^l$, не лежит в образе касательной плоскости в точке Z при отображении G ($\notin G_*\mathbf{T}_Z(\partial D^k \times \partial D^l)$) и сквозное отображение

$$\partial D^k \times \partial D^l \xrightarrow{\bar{G}} \mathbf{R}^{m+n} \setminus \{0\} \subset \mathbf{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

переводит $\partial D^k \times \partial D^l$ в $0 \in \mathbf{R}^m$. Из последнего условия следует, что векторы $\tilde{G}(Z)$ и $\bar{G}(Z), Z \in \partial D^k \times \partial D^l$, линейно независимы.

Через $\mathcal{D}^{l,n}_{k,m} = \mathcal{D}$ обозначим множество всех расслоенных погружений с расщепляемыми полями трансверсальных 2-реперов из $\partial D^k \times \partial D^l \longrightarrow \partial D^k$ в $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Топологию на множестве $\mathcal{D}$ введем с помощью следующей метрики:

$$\hat{\rho}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'') = \max\{\rho_0(G'(Z), G''(Z)), \rho_0(G'_*(\hat{V}), G''_*(\hat{V})), \rho_0(\tilde{G}'(Z), \tilde{G}''(Z)),$$
$$\rho_0(\bar{G}'(Z), \bar{G}''(Z)) \mid Z \in \partial D^k \times \partial D^l, \hat{V} \in \mathbf{T}_Z(\partial D^k \times \partial D^l), \|\hat{V}\| = 1\}$$

для $\mathcal{G}' = ((G', g'), (\tilde{G}', \tilde{g}'), \bar{G}')$, $\mathcal{G}'' = ((G'', g''), (\tilde{G}'', \tilde{g}''), \bar{G}'')$.

Определим отображение $\tilde{\pi} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ аналогично тому, как выше было определено отображение $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$. Для $((H, f), \bar{H}) \in \mathcal{C}$ пусть $\tilde{\pi}((H, f), \bar{H})) = ((G, g), (\tilde{G}, \tilde{g}), \bar{G})$, где G и $\bar{G}$ являются ограничениями H и $\bar{H}$ на $\partial D^k \times \partial D^l$, g — ограничение f на ∂D^k, а $\tilde{G}(x; y) = \nabla_s H(1, x; y), \tilde{g}(x) = \nabla_s f(1, x)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Смейла о накрывающей гомотопии (см. теорему 1.1 в работе Смейла [1]) для расслоенных погружений.

Теорема. (i) *Отображения* $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ $(m > k, n \geqslant l)$ *и* $\hat{\pi} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ $(m \geqslant k, n > l)$ *являются расслоениями в смысле Серра.*

(ii) *Композиция* $\tilde{\pi} \circ \hat{\pi} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ $(m > k, n > l)$ *является расслоением в смысле Серра.*

Работа написана при частичной поддержке РФФИ, грант № 96–01–00287–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smale S.* The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces //Ann. Math. 1959. **69**. 327–344.

Поступила в редакцию
25.12.97

УДК 517.94

О КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСАХ К ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

А. А. Майлыбаев

Рассматривается гладкое n-параметрическое семейство действительных $(m \times m)$-матриц $A(p)$, $p \in \mathbf{R}^n$. Областью устойчивости является множество значений вектора параметров p, при которых все собственные значения λ матрицы $A(p)$ имеют отрицательные действительные части. Касательным

конусом к области устойчивости в точке ее границы называется множество направлений векторов, по которым можно выпустить кривую, лежащую, за исключением начальной точки, в области устойчивости [1]. В [1] дано описание касательных конусов (с точностью до невырожденного линейного преобразования) в зависимости от жордановой структуры матрицы A. В настоящей работе в явном виде построены касательные конусы при помощи первых производных матрицы A по параметрам p_j, $j = 1, \ldots, n$, и ее собственных и присоединенных векторов, вычисленных в исследуемой точке границы.

Рассмотрим точку границы области устойчивости $p = p_0$, такую, что матрица $A_0 = A(p_0)$ имеет нулевое собственное значение $\lambda = 0$, которому отвечает ровно одна жорданова клетка порядка k, а остальные собственные значения имеют отрицательные действительные части. Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ и $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ — правые и левые собственные и присоединенные векторы, соответствующие $\lambda = 0$ ($A_0u_0 = 0$, $A_0u_1 = u_0, \ldots, A_0u_{k-1} = u_{k-2}$, $v_0^T A_0 = 0$, $v_1^T A_0 = v_0^T, \ldots, v_{k-1}^T A_0 = v_{k-2}^T$) и удовлетворяющие условиям нормировки $v_0^T u_{k-1} = 1$, $v_j^T u_{k-1} = 0$, $j = 1, \ldots, k-1$. При заданных $u_0, \ldots, u_{k-1}$ векторы $v_0, \ldots, v_{k-1}$, удовлетворяющие данной нормировке, определяются однозначно. Согласно [2, 3], любое гладкое семейство матриц $A(p)$ в окрестности $p = p_0$ представимо следующим образом:

$$A(p) = C(p)A'(\varphi(p))C^{-1}(p), \tag{1}$$

где $C(p)$, $\varphi(p) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)^T$ — матрица порядка $m \times m$ и вектор порядка d, гладко зависящие от p; $\det C(p) \neq 0$, $\varphi(p_0) = 0$. Семейство матриц $A'(p')$, $p' = (p'_1, \ldots, p'_d)^T \in \mathbf{R}^d$ (версальную деформацию матрицы A_0), можно выбрать в виде $A'(p') = J_0 + B(p')$, где J_0 — верхнетреугольная жорданова форма матрицы A_0, $B(p')$ – семейство блочно-диагональных матриц, зависящее от структуры J_0. Характеристические уравнения для $A(p)$ и $A'(\varphi(p))$ совпадают. В рассматриваемом случае первый блок семейства $A'(p')$, отвечающий $\lambda = 0$, равен [2–4]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & \cdots & p'_k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Устойчивость матрицы $A'(p')$ в окрестности точки $p' = \varphi(p_0) = 0$ определяется блоком (2) (другие блоки отвечают собственным значениям с отрицательными действительными частями, поэтому для собственных значений этих блоков $\operatorname{Re}\lambda < 0$ в достаточно малой окрестности нуля). Характеристическое уравнение (2) имеет вид $\lambda^k - p'_k\lambda^{k-1} - \cdots - p'_1 = 0$. Отсюда, используя результаты [1], найдем касательный конус K'_0 к области устойчивости $A'(p')$ в точке $p' = 0$ (e' — направление в $\mathbf{R}^d$):

$$K'_0 = \{\, e' = (e'_1, \ldots, e'_d)^T \ : \ e'_1 = \cdots = e'_{k-2} = 0, \ e'_{k-1} \leqslant 0, \ e'_k \leqslant 0 \,\}. \tag{3}$$

Введем векторы $f_j \in \mathbf{R}^n$, $j = 0, \ldots, k-1$:

$$f_j = \Big(\sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_1} u_{j-r}, \ \sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_2} u_{j-r}, \ \ldots, \ \sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_n} u_{j-r} \Big)^T, \tag{4}$$

где производные берутся в точке p_0. Аналогично определяются векторы $f'_j \in \mathbf{R}^d$, $j = 0, \ldots, k-1$, для семейства $A'(p')$ в точке $p' = 0$.

Лемма. *Векторы f_j и f'_j, $j = 0, \ldots, k-1$, связаны соотношениями*

$$f_j^T = f_j'^T D_\varphi, \quad j = 0, \ldots, k-1, \tag{5}$$

где D_φ — матрица Якоби порядка $d \times n$ с элементами $d\varphi_r/dp_s$, $r = 1, \ldots, d$, $s = 1, \ldots, n$.

Для доказательства леммы необходимо подставить (1) в выражение для вектора f_j и воспользоваться свойствами собственных и присоединенных векторов. Непосредственным вычислением можно показать, что $f'_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, где единица стоит на $(j+1)$-м месте.

Направления $e \in \mathbf{R}^n$ и $e' \in \mathbf{R}^d$ связаны соотношением

$$e' = D_\varphi e. \tag{6}$$

Любой кривой $p(\varepsilon)$, выпущенной по направлению e в область устойчивости, соответствует кривая $p'(\varepsilon) = \varphi(p(\varepsilon))$ с направлением e' из (6), также лежащая в области устойчивости. В случае линейной независимости векторов f_j, $j = 0, \dots, k-1$, можно показать (с помощью леммы и теоремы о неявной функции, примененной к соотношению $p' - \varphi(p) = 0$), что по любому направлению e, такому, что $e' = D_\varphi e$, $e' \in K'_0$, можно выпустить кривую, лежащую в области устойчивости. Умножив (5) скалярно на e, с учетом (6) имеем $(f_j, e) = (f'_j, e') = e'_{j+1}$. Отсюда, используя (3), найдем касательный конус к области устойчивости $A(p)$ в точке $p = p_0$:

$$K_0 = \{\ e:\ (f_0, e) = \dots = (f_{k-3}, e) = 0,\ (f_{k-2}, e) \leqslant 0,\ (f_{k-1}, e) \leqslant 0\ \}. \tag{7}$$

Аналогично рассматривается точка $p = p_0$ границы области устойчивости, где матрица $A_0 = A(p_0)$ имеет одну пару комплексно-сопряженных чисто мнимых собственных чисел $\lambda = \pm i\omega$, каждому из которых соответствует ровно одна жорданова клетка порядка k (для остальных собственных значений $\operatorname{Re}\lambda < 0$). Определим векторы g_j, h_j, $j = 0, \dots, k-1$:

$$g_j + ih_j = \Big(\sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_1} u_{j-r},\ \sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_2} u_{j-r},\ \dots,\ \sum_{r=0}^{j} v_r^T \frac{\partial A}{\partial p_n} u_{j-r} \Big)^T, \tag{8}$$

где u_j, v_j, $j = 0, \dots, k-1$, — правые и левые собственные и присоединенные векторы, соответствующие $\lambda = i\omega$ ($A_0 u_0 = i\omega u_0$, $\dots$, $A_0 u_{k-1} = i\omega u_{k-1} + u_{k-2}$, $v_0^T A_0 = i\omega v_0^T$, $\dots$, $v_{k-1}^T A_0 = i\omega v_{k-1}^T + v_{k-2}^T$) и удовлетворяющие условиям нормировки $v_0^T u_{k-1} = 1$, $v_j^T u_{k-1} = 0$, $j = 1, \dots, k-1$; производные вычисляются при $p = p_0$. Рассматривая вместо (2) соответствующий $\lambda = i\omega$ блок [2–4]

$$\begin{pmatrix} i\omega & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & i\omega & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & i\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_1 + ip'_2 & p'_3 + ip'_4 & \cdots & p'_{2k-1} + ip'_{2k} \end{pmatrix} \tag{9}$$

(блок, соответствующий $\lambda = -i\omega$, состоит из чисел, комплексно-сопряженных к элементам (9)), можно доказать свойства (5) и (6) для векторов g_j, g'_j, h_j, h'_j и направлений e, e'. Касательный конус к области устойчивости семейства $A'(p')$ в точке $p' = 0$ определяется характеристическим уравнением блока (9)

$$\mu^k - (p'_{2k-1} + ip'_{2k})\mu^{k-1} - \dots - (p'_1 + ip'_2) = 0, \quad \mu = \lambda - i\omega,$$

и равен [1]

$$K'_{i\omega} = \{\ e':\ e'_1 = \dots = e'_{2k-4} = 0,\ e'_{2k-3} \leqslant 0,\ e'_{2k-2} = 0,\ e'_{2k-1} \leqslant 0\ \},$$

откуда аналогично (7) в случае линейной независимости векторов g_j, h_r, $j = 0, \dots, k-1$, $r = 0, \dots, k-2$, для семейства $A(p)$ в точке $p = p_0$ получим

$$\begin{gathered} K_{i\omega} = \{\ e:\ (g_0, e) = \dots = (g_{k-3}, e) = 0,\ (g_{k-2}, e) \leqslant 0,\ (g_{k-1}, e) \leqslant 0, \\ (h_0, e) = \dots = (h_{k-2}, e) = 0\ \}. \end{gathered} \tag{10}$$

Когда матрица $A(p_0)$ имеет несколько собственных чисел типа $\lambda = \pm i\omega$ и (или) собственное число $\lambda = 0$, каждому из которых соответствует ровно одна жорданова клетка, версальная деформация $A'(p')$ состоит из блоков вида (9) и (или) (2). Комбинируя методы доказательства (7) и (10), можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть в точке границы области устойчивости $p = p_0$ матрица $A(p_0)$ имеет собственные значения $\lambda = \pm i\omega_s$, $s = 1, \dots, l$, каждому из которых соответствует ровно одна жорданова клетка порядка k_s, и (или) собственное значение $\lambda = 0$, которому соответствует жорданова клетка порядка k (для остальных собственных значений $\operatorname{Re}\lambda < 0$). Тогда если система векторов g_j^s, h_r^s, $j = 0, \dots, k_s - 1$, $r = 0, \dots, k_s - 2$, вычисленных по формулам (8) для $\lambda = i\omega_s$ для каждого*

$s = 1, \ldots, l$, и (или) векторов f_j, $j = 0, \ldots, k-1$, вычисленных по формулам (4) для $\lambda = 0$, линейно независима, то касательный конус к области устойчивости семейства $A(p)$ в точке $p = p_0$ имеет вид

$$K = \{\ e : \ (g_0^s, e) = \cdots = (g_{k_s-3}^s, e) = 0, \ (g_{k_s-2}^s, e) \leqslant 0, \ (g_{k_s-1}^s, e) \leqslant 0,$$
$$(h_0^s, e) = \cdots = (h_{k_s-2}^s, e) = 0, \quad s = 1, \ldots, l \quad \text{и (или)}$$
$$(f_0, e) = \cdots = (f_{k-3}, e) = 0, \ (f_{k-2}, e) \leqslant 0, \ (f_{k-1}, e) \leqslant 0\ \}.$$

В случае общего положения условие линейной независимости векторов выполняется (сколь угодно малым шевелением семейства $A(p)$ можно избавиться от точек, где это условие не выполнено [2, 3]).

Работа обобщает результаты [5], где найдены касательные конусы для общих двух- и трехпараметрических семейств.

Автор выражает благодарность А. П. Сейраняну за внимание к работе и полезные советы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 97-01-00735.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левантовский Л.В.* О границе множества устойчивых матриц // Успехи матем. наук. 1980. **35**, № 2. 213–214.
2. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук. 1971. **26**, № 2. 101–114.
3. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.
4. *Галин Д.М.* О вещественных матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук. 1972. **27**, № 1. 241–242.
5. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Об особенностях границ областей устойчивости // Докл. РАН. 1998. **359**, № 5. 632–636.

Поступила в редакцию
07.04.97

УДК 531.391.5

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОПРОКИНУТОГО МАЯТНИКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А. В. Влахова

Рассмотрим плоское движение однозвенного опрокинутого математического маятника, закрепленного на подвижной тележке. Обозначим ускорение силы тяжести через g, длину стержня — через r, угол отклонения стержня от вертикали — через φ, ускорение тележки — через u (рис. 1).

Считая ускорение тележки управлением, сформируем u в виде линейной обратной связи по φ и по $\dot\varphi$ и предположим, что в цепи обратной связи имеется запаздывание h:

$$u(T) = k\left[\varphi(T-h) + \gamma\dot\varphi(T-h)\right]. \tag{1}$$

Подставив (1) в уравнение движения системы [1] и введя безразмерное время t, получим

$$\ddot\varphi(t) + \dot\varphi(t-\tau)\cos\varphi(t) + a\varphi(t-\tau)\cos\varphi(t) - b\sin\varphi(t) = 0, \tag{2}$$

где

$$t = \frac{k\gamma}{r}T, \quad a = \frac{r}{k\gamma^2}, \quad b = \frac{gr}{k^2\gamma^2}, \quad \tau = \frac{k\gamma}{r}h.$$

Целью работы является построение области асимптотической устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения (2) в плоскости комбинированных параметров $a > 0$, $b > 0$ при фиксированном $\tau > 0$. Исследование проводится методом D-разбиений [2].

Характеристический квазиполином уравнения первого приближения к (2) имеет вид

$$R(z) = z^2 - b + ze^{-\tau z} + ae^{-\tau z} = 0, \quad z = x + iy. \tag{3}$$