



A. A. Майлыбаев

аспирант Московского
государственного университета

Научный руководитель
д. ф.-м. н. А. П. Сейранян

A. A. Mailybaev

О СМЕНЕ КРИТИЧЕСКОГО ТОНА В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Copyright © 2000, A. A. Майлыбаев

Исследуется эффект смены критического тона в линейных неконсервативных механических системах. Смена критического тона наблюдалась во многих работах при параметрическом исследовании флаттера крыльев самолётов, колебательной устойчивости трубопроводов, по которым течёт жидкость, и т. д. Целью настоящего исследования является полная классификация способов смены критического тона в случае общего положения и их описание с точки зрения теории особенностей и бифуркаций ■

Transference of Instability between Branches in Non-conservative Mechanical Systems

The phenomenon of transference of stability between branches (change of critical tone) in non-conservative mechanical systems is studied. Such phenomenon has often been discussed in the literature for specific systems (wings in air flow, tubes conveying fluid, etc.). In the paper complete classification of different types of this phenomenon in generic case is carried out. Every type is described from the singularities and bifurcations theory point of view ■

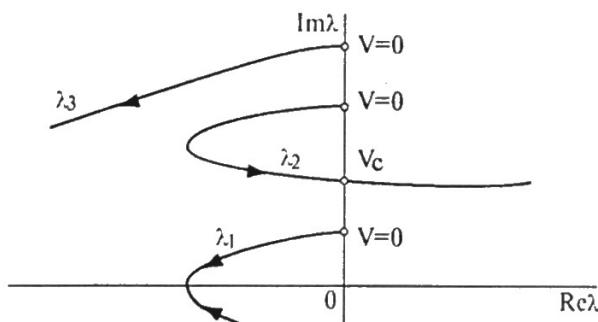


Рис. 1. Характерное поведение собственных значений на комплексной плоскости при увеличении V .

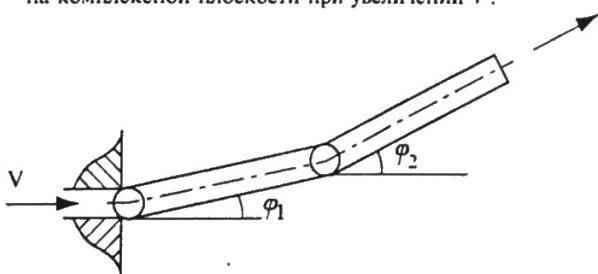


Рис. 2. Двузвенная труба с упругими шарнирами, по которой течёт жидкость.

потока жидкости или газа, величину неконсервативной нагрузки и т. п., то есть определяет величину неконсервативных сил. Предполагается, что при $V = 0$ система является устойчивой и консервативной ($B = 0$, $C = C^T > 0$). Параметр V описывает свойства конструкции (такие, как длина, жёсткость и т. п.). При заданном V критическим значением параметра нагрузки V_c называется наименьшее положительное V , при котором система становится неустойчивой. Таким образом, критическая нагрузка V_c является функцией параметра V .

Введение

Рассмотрим линейную колебательную систему вида

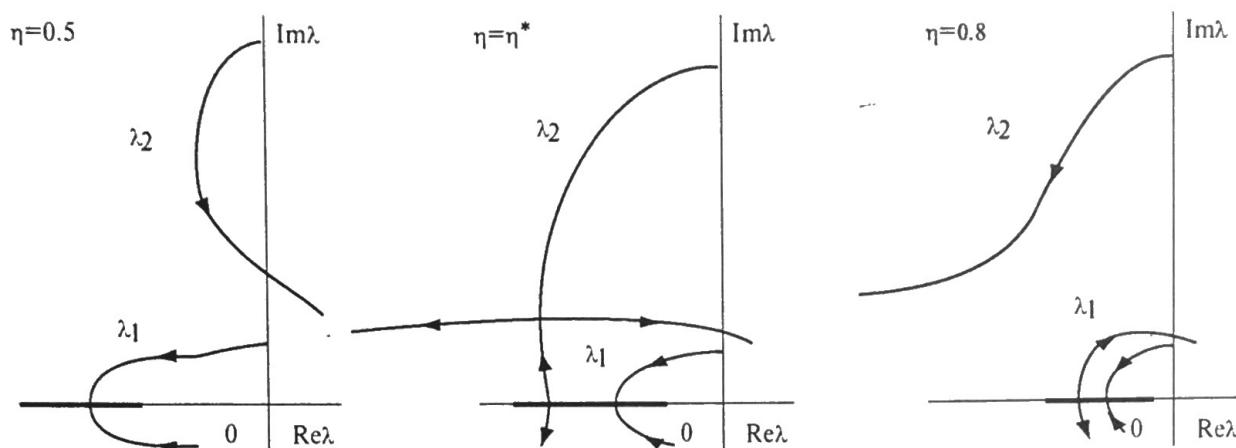
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0, \quad (*)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор обобщённых координат; M , B , C — вещественные $(n \times n)$ -матрицы, причём $M = M^T > 0$. Произвольность матриц B и C означает возможность наличия всех типов сил (диссипативных, гироскопических, консервативных и циркуляционных). Задача на собственные значения, соответствующая (*), имеет вид

$$[M\lambda^2 + B\lambda + C]u = 0,$$

где λ — собственное значение, u — собственный вектор. Условием асимптотической устойчивости тривиального решения системы (*) является отрицательность действительных частей всех собственных значений.

Предполагается, что матрицы M , B и C гладко зависят от двух вещественных параметров V и V_c . Параметр V является особым (параметр нагрузки). Он обычно обозначает скорость набегающего

Рис. 3. Поведение собственных значений при различных значениях параметра η .

Превышение критического значения $V > V_c$ недопустимо, так как это может привести к разрушению конструкции.

На рис. 1 представлено характерное поведение собственных значений на комплексной плоскости при увеличении V от 0 (параметр p фиксирован). В связи с симметрией относительно действительной оси рассматривается только верхняя полуплоскость $Im\lambda \geq 0$. Стрелки указывают направление движения при увеличении V . Как видно из рис. 1, потеря устойчивости системы связана с переходом в правую полуплоскость ($Re\lambda > 0$) собственного значения λ_2 , движущееся по второй снизу ветви. В этом случае говорят, что система теряет устойчивость по второму тону. Таким образом, номер критического тона определяется не только расположением собственных значений на мнимой оси при $V = 0$, но и путём, пройдённым при увеличении V от 0 до V_c . При изменении различных параметров задачи (длин, жёсткостей и т.п.) картина поведения собственных значений на комплексной плоскости может качественно изменяться. Такие изменения встречаются во многих задачах устойчивости неконсервативных систем и имеют различный характер.

Рассмотрим двузвенную трубу с упругими шарнирами, по которой течёт жидкость (рис. 2). Линеаризованные уравнения движения такой системы в безразмерных координатах имеют вид [1]

$$\begin{pmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} \eta V & 2\eta V \\ 0 & \eta V \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} 2 - V^2 & -1 + V^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$; $\eta^2 = m_f/(m + m_f)$ — отношение массы жидкости, заключённой в трубе, к массе всей системы; V — безразмерный параметр скорости жидкости. Поведение собственных значений при значениях $\eta = 0.5$, $\eta = \eta^*$ и $\eta = 0.8$, где $\eta^* = \sqrt{1547/2862 - 7\sqrt{7}/1431} \approx 0.73$ [2], изображено на рис. 3. Видно, что при $\eta = 0.5$ критическим является второй тон, а при $\eta = 0.8$ критическим становится первый тон. В точке смены критического тона (при $\eta = \eta^*$) происходит бифуркация собственных значений. Этот эффект обсуждался в работах [1–5] и был назван “перехлест ветвей”.

В работах [6, 7] исследовалась аэроупругая устойчивость прямого крыла большого удлинения, подкреплённого подкосом и находящегося в набегающем потоке газа со скоростью V . Подкос представляет собой абсолютно жёсткий стержень, фиксирующий некоторую точку крыла. Крыло может совершать свободные колебания вокруг точки крепления подкоса. При условии, что подкос закреплён на оси жёсткости крыла на расстоянии h от фюзеляжа, в [7] для конкретной модели крыла были проведены расчёты и получены следующие картины поведения собственных значений (рис. 5, числа около мнимой оси обозначают скорость, при которой собственное значение переходит в правую полуплоскость). Видно, что при $h < 0.471l$ критическим является второй тон, а при $h > 0.471l$ — первый тон. Из сравнения с предыдущим примером видно, что механизм смены критического тона в данном случае носит качественно новый характер и приводит к скачку критической скорости [7].

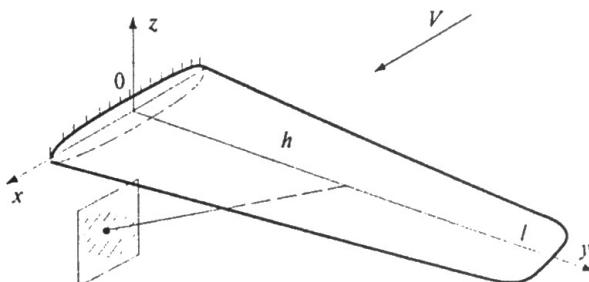


Рис. 4. Прямоугольное крыло большого удлинения, подкреплённое подкосом и находящееся в набегающем потоке газа.

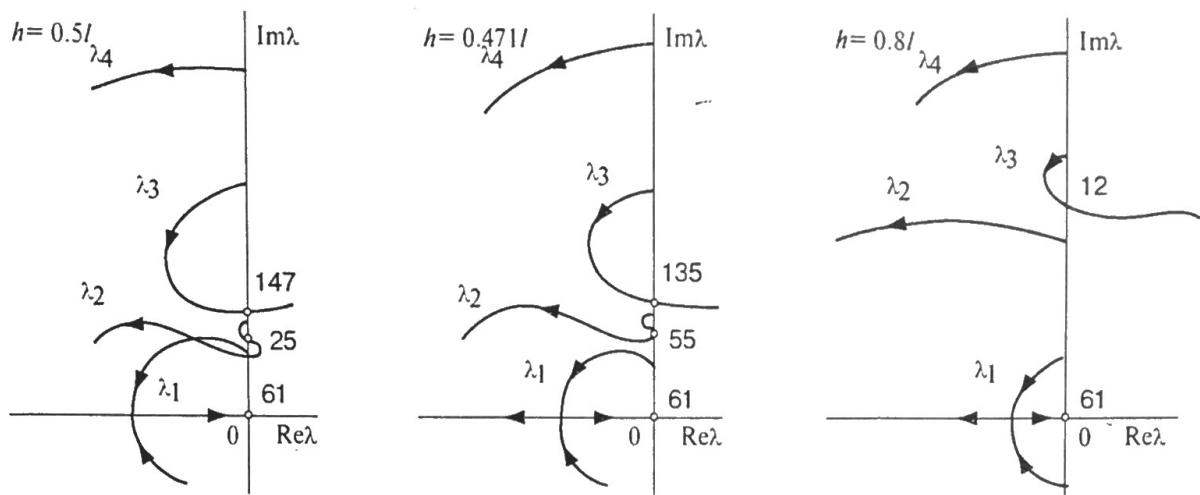


Рис. 5. Поведение собственных значений при различных значениях параметра h .

Таким образом, поведение собственных значений может иметь довольно сложный характер. Особенности такого поведения приводят к механическим эффектам, например, отражаются на изменении критического тона и критической скорости потери устойчивости. Целью настоящего исследования является полная классификация способов смены критического тона в случае общего положения и их описание с точки зрения теории особенностей и бифуркаций. Особое внимание уделяется описанию характерного поведения собственных значений на комплексной плоскости в зависимости от параметров в окрестности точки смены критического тона и определению влияния рассматриваемого эффекта на гладкость функции критической нагрузки $V_c(p)$.

1. Достаточные условия неизменности номера критического тона

Опишем, как определяется номер критического тона в общем случае. При $V = 0$ система консервативна. Её собственными значениями являются чисто мнимые величины $\lambda_i = \pm i\omega_i$, $\omega_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, где частоты $0 < \omega_1 < \dots < \omega_n$ предполагаются простыми. Колебания с частотой ω_k называются k -ым тоном. При увеличении V от 0 собственные значения сходят с мнимой оси и начинают двигаться по некоторым траекториям на комплексной плоскости. Однако номер тона за ними (и, следовательно, за их траекториями) сохраняется. На рис. 1 изображены траектории (ветви) собственных значений первых трёх тонов (стрелки указывают на направление увеличения V). При $V = V_c$ некоторое собственное значение λ_k (нижний индекс обозначает номер тона) пересекает мнимую ось и система теряет устойчивость. Тогда говорят, что система потеряла устойчивость по k -му тону.

При появлении кратных собственных значений возникают проблемы определения номера критического тона. В этом случае при увеличении V несколько собственных значений сталкиваются, сливаясь в одно кратное собственное значение, а затем расходятся. Если сталкиваются собственные значения, отвечающие одному и тому же тону, то номер тона за ними сохраняется (см., например, рис. 1, где на действительной оси сталкиваются комплексно сопряжённые собственные значения $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$, отвечающие первому тону). Если же сталкиваются собственные значения различных тонов, то после столкновения номер тона для них не определён. Это связано с тем, что собственные значения в результате столкновения (слияния) становятся "равноправными". Если одно из этих собственных значений приводит затем к неустойчивости, то номер критического тона не определён. Однако такие случаи встречаются очень редко при исследовании задач механики. Несмотря на указанную неполноту данного определения критического тона, оно широко используется.

Рассмотрим значение параметра $p = p_0$, при котором критическим является тон с номером k . Пусть при $p = p_0$ выполняются следующие условия:

1. собственное значение λ_k является простым при $0 < V \leq V_c$;
2. при $V = V_c$ на мнимой оси находятся только λ_k и $\bar{\lambda}_k$, а для остальных собственных значений выполняется условие $\operatorname{Re}\lambda_m < 0$, $m \neq k$;
3. $\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_k}{\partial V} \neq 0$ при $V = V_c$.

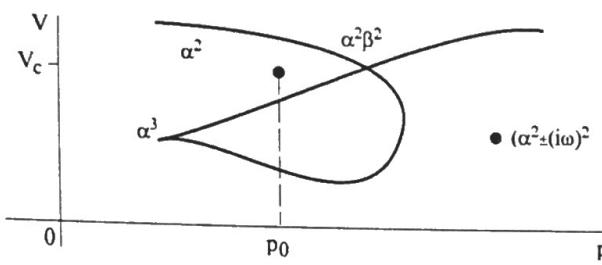


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма двухпараметрического семейства матриц.

Данная формула является результатом применения теоремы о неявной функции к уравнению $\operatorname{Re}\lambda(p, V_c) = 0$.

Любая точка, в которой происходит смена критического тона, характеризуется нарушением хотя бы одного из условий 1–3. Эти точки можно выделить, рассматривая значения p , при которых одно из условий нарушено, и, таким образом, провести классификацию способов смены критического тона.

2. Первый способ смены критического тона (нарушение условия 1)

В [9–11] было показано, что бифуркационная диаграмма двухпараметрического семейства действительных матриц (множество значений параметров (p, V) , при которых имеются кратные собственные значения) в случае общего положения (в типичном случае) состоит из изолированных точек и гладких кривых, единственными особенностями которых являются точки самопересечения и точки возврата (рис. 6). Эти результаты верны и для рассматриваемой системы (*), которая удвоением размерности может быть приведена к виду $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, где \mathbf{A} — несимметрическая $(2n \times 2n)$ -матрица. Кривые на бифуркационной диаграмме соответствуют двукратным действительным собственным значениям $\lambda = \alpha$ (обозначим α^2); в точках самопересечения имеются две пары двукратных действительных собственных значений $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$, $\alpha \neq \beta$ (обозначим $\alpha^2\beta^2$); точки возврата определяются наличием трёхкратного действительного собственного значения $\lambda = \alpha$ (α^3). Изолированные точки отвечают паре двукратных комплексно сопряжённых собственных значений $\lambda = \alpha \pm i\omega$, $\omega \neq 0$ (обозначим $(\alpha \pm i\omega)^2$). В каждом из обозначений в скобках указывается кратное собственное значение, а показатель степени определяет размер соответствующей жордановой клетки.

Пусть при $p = p_0$ условие 1 нарушено (при некотором V ($0 < V \leq V_c$) имеется кратное собственное значение). Это означает, что отрезок $[0, V_c]$, $p = p_0$ имеет точки пересечения с бифуркационной диаграммой

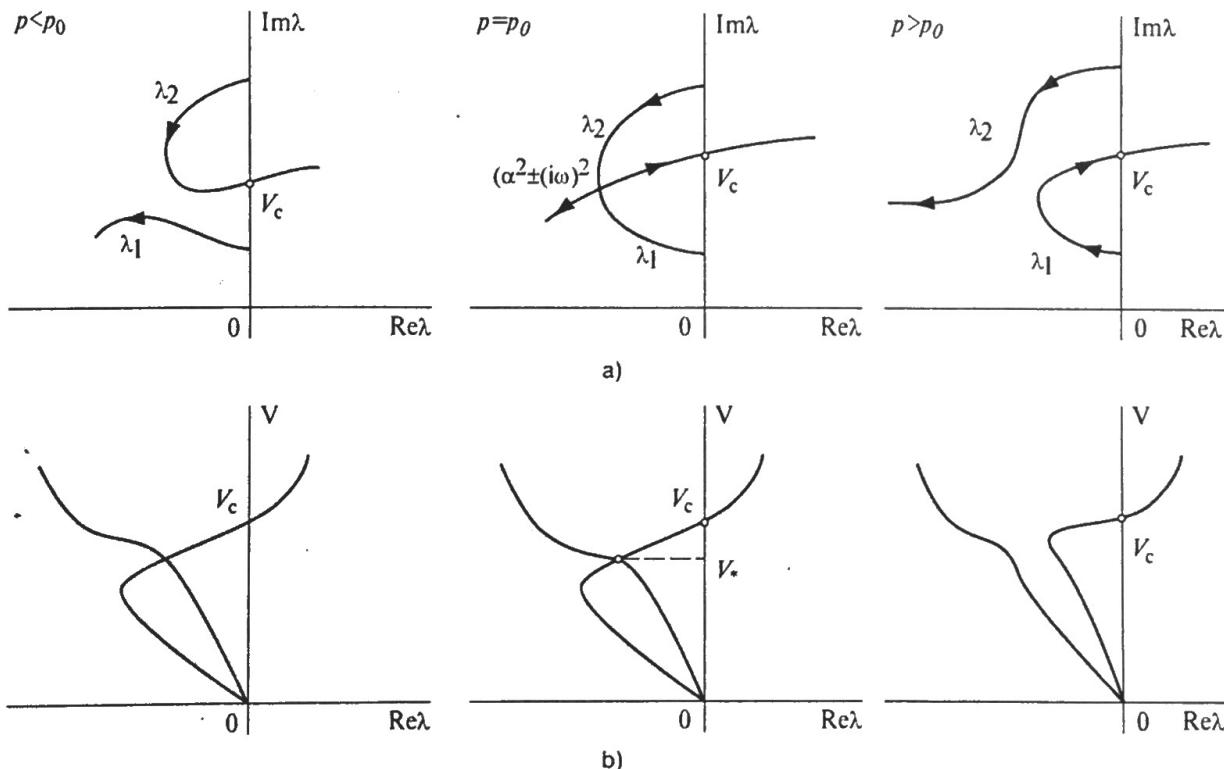


Рис. 7. Смена критического тона (при нарушении условия 1): а) поведение λ при увеличении V при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$; б) зависимости $\operatorname{Re}\lambda(V)$ при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$.

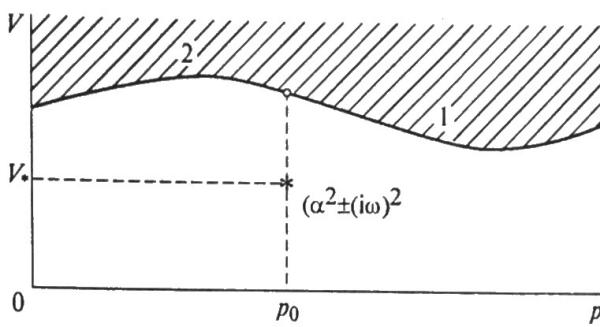


Рис. 8. Область устойчивости на плоскости параметров при нарушении условия 1.

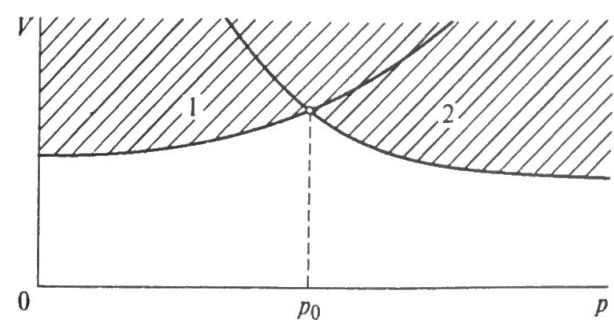


Рис. 9. Область устойчивости на плоскости параметров при нарушении условия 2.

(рис. 6). Точки типа α^2 , $\alpha^2\beta^2$, α^3 на бифуркационной диаграмме отвечают столкновению на вещественной оси комплексно сопряжённых собственных значений. Примером точки α^2 является точка бифуркации собственных значений λ_1 и $\bar{\lambda}_1$, отвечающих первому тону, на рис. 1. Анализ поведения собственных значений около точек типа α^2 , $\alpha^2\beta^2$, α^3 методами теории особенностей [9, 10] приводит к выводу, что появление кратных вещественных λ не ведёт к смене критического тона. Возникающие при этом эффекты, связанные с неопределённостью критического тона, не имеют большого интереса для механики. Поэтому мы опустим анализ, который заключается в рассмотрении различных вариантов поведения ветвей собственных значений в окрестности точки кратности. Единственный примечательный случай отвечает наличию двукратного нулевого собственного значения при $V = V_c$, когда граница области устойчивости имеет излом (номер критического тона не меняется) [9, 10].

В изолированной точке бифуркационной диаграммы типа $(\alpha \pm i\omega)^2$ происходит столкновение собственных значений различных тонов. Если одно из этих собственных значений впоследствии (при увеличении V) приводит к потере устойчивости, то при данном $p = p_0$ происходит смена номера критического тона. На рис. 7 для $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$ представлено типичное поведение собственных значений на комплексной плоскости (стрелки указывают направление изменения λ при увеличении V) и зависимость действительных частей собственных значений от V . Двукратное собственное значение $(\alpha \pm i\omega)^2$ возникает в точке $p = p_0$, $V = V^* < V_c$. В данном примере при $p < p_0$ и $p > p_0$ критическими являются соответственно второй и первый тон, а при $p = p_0$ номер критического тона не определён.

Рассматриваемый эффект (“перехлест ветвей” [3]) подробно изучен в [2, 4]. В этих работах, в частности, показано, что взаимодействие собственных значений вблизи двукратной точки описывается гиперболами, имеющими ортогональные асимптоты. Смена критического тона связана с появлением двукратного комплексного собственного значения. Вследствие локальности этого эффекта (все происходит в окрестности двукратного $\lambda = \alpha \pm i\omega$) смена критического тона никак не отражается на гладкости функции $V_c(p)$. Типичная форма области устойчивости изображена на рис. 8, где область неустойчивости заштрихована, а числа около границы указывают на номер критического тона.

Как было показано во введении, рассматриваемый способ смены критического тона реализуется при исследовании устойчивости трубы, проводящей жидкость. В этой задаче V — скорость жидкости, а параметр $p = \eta$ зависит от отношения масс трубы и жидкости. Многочисленные примеры конкретных механических систем, в которых происходит смена критического тона таким же способом, приведены в работах [1–5].

3. Второй способ смены критического тона (нарушение условия 2)

В случае нарушения условия 2 на мнимой оси при $V = V_c$ должны находиться несколько собственных значений (более одной пары $\lambda_k, \bar{\lambda}_k$). Возможны два типичных случая (случаи общего положения) [9–11]: наличие простого нулевого и пары простых мнимых комплексно сопряжённых собственных значений либо наличие двух различных пар простых мнимых собственных значений (обозначим эти случаи через $0(\pm i\omega)$ и $(\pm i\omega_1)(\pm i\omega_2)$ соответственно). В [9, 10] показано, что такие структуры приводят к возникновению особенности (излома) границы области устойчивости в точке $V = V_c$, $p = p_0$ (рис. 9).

Легко показать, что значения $p = p_0$, при которых возникают точки излома $0(\pm i\omega)$ и $(\pm i\omega_1)(\pm i\omega_2)$, являются точками смены критического тона. На рис. 10 для случая $0(\pm i\omega)$ представлено характерное поведение собственных значений на комплексной плоскости при изменении V и зависимости $\operatorname{Re}\lambda(V)$ для $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$, где p_0 — точка излома границы устойчивости (и точка смены критического тона). Как видно из рис. 10, смена критического тона связана с тем, что скорости V_1 и V_2 , при которых собственные значения первого и второго тонов пересекают мнимую ось, сближаются, становятся равными и затем меняются местами. При $p = p_0$ номер критического тона не определён, так как мнимую ось одновременно пересекают собственные значения различных тонов.

Смена критического тона в рассматриваемом случае сопровождается слабым разрывом (разрывом первой производной) $V_c(p)$ (рис. 9).

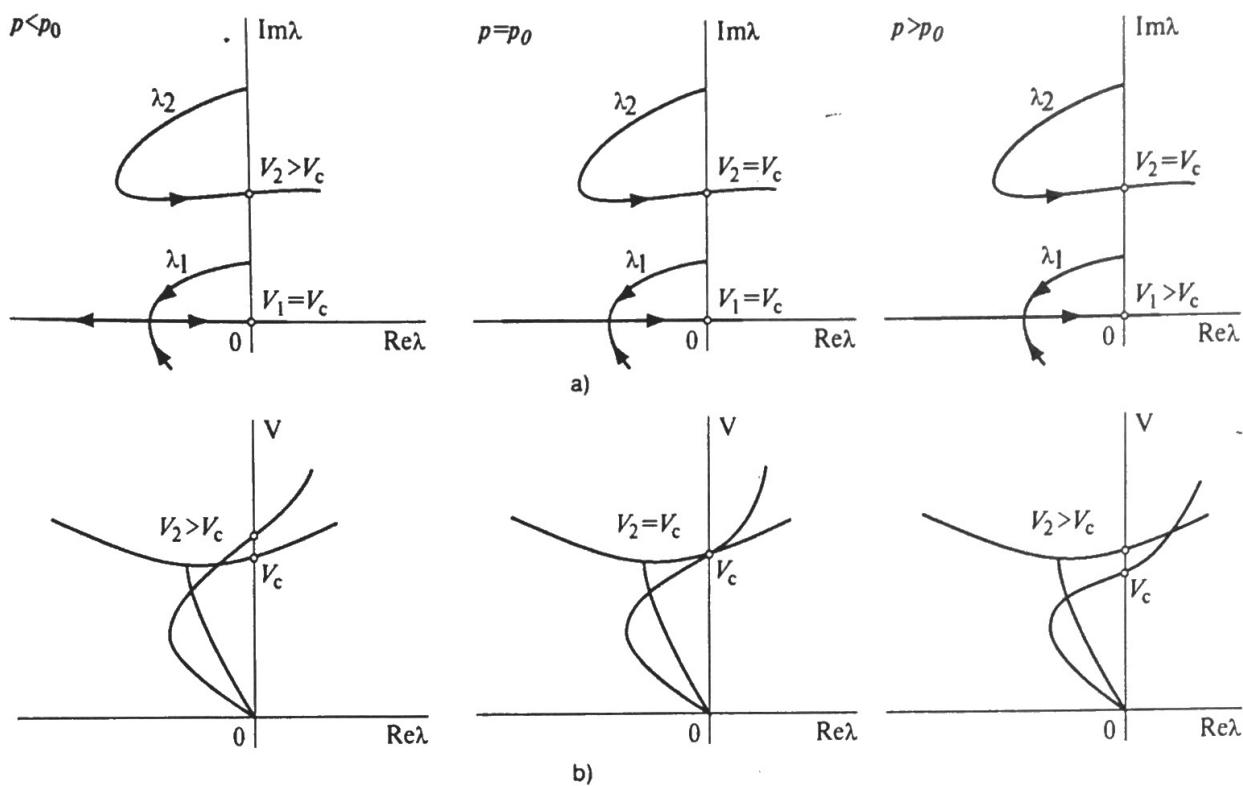


Рис. 10. Смена критического тона (при нарушении условия 2): а) поведение λ при увеличении V при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$; б) зависимости $\text{Re}\lambda(V)$ при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$.

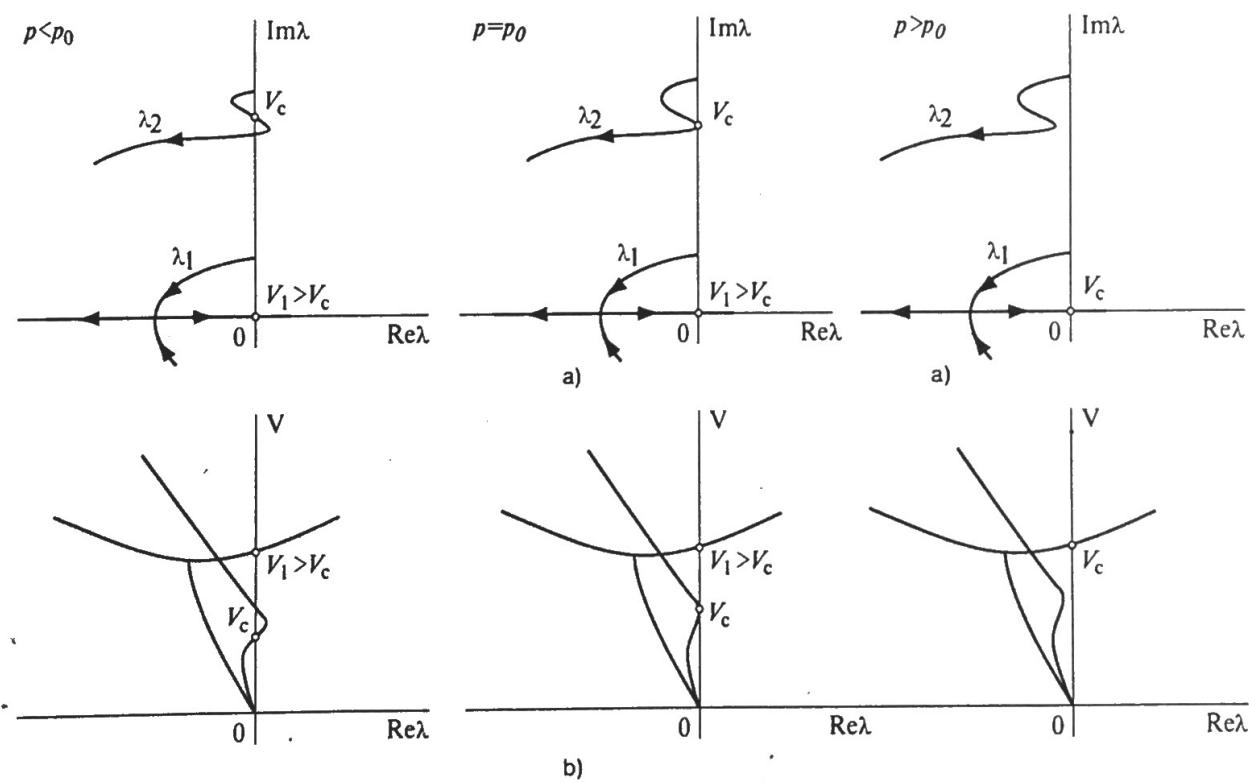


Рис. 11. Смена критического тона (при нарушении условия 3): а) поведение λ при увеличении V при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$; б) зависимости $\text{Re}\lambda(V)$ при $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$.

4. Третий способ смены критического тона (нарушение условия 3)

Случай, когда $\partial \text{Re}\lambda_k / \partial V = 0$ при $p = p_0$, $V = V_c$, изображён на рис. 11. При $p = p_0$ с увеличением V собственное значение λ_k приближается к мнимой оси, касаясь её при $V = V_c$. Из условия устойчивости при $V < V_c$ следует отрицательность второй производной $\partial^2 \text{Re}\lambda_k / \partial V^2 < 0$ в точке $V = V_c$, $p = p_0$. Таким

образом, после соприкосновения с мнимой осью λ_k уходит обратно в устойчивую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (система снова становится асимптотически устойчивой).

На рис. 11 изображено характерное поведение собственных значений на комплексной плоскости при изменении V и зависимость $\operatorname{Re}\lambda_k$ от V для $p < p_0$, $p = p_0$ и $p > p_0$. Характерный вид области устойчивости изображен на рис. 12. Из рис. 12 видно, что рассматриваемый случай отвечает наличию вертикальной касательной к границе области устойчивости на плоскости параметров p , V . При прохождении p через точку p_0 величина критической нагрузки V_c пересекает с одной части области неустойчивости на другую. При этом номер критического тона может измениться, как это и происходит в данном примере. Точка касания на рис. 12 соответствует значениям параметров $p = p_0$, $V = V_c$. В этой же точке собственное значение λ_k касается мнимой оси, и график $\operatorname{Re}\lambda_k(V)$ касается оси V (рис. 11).

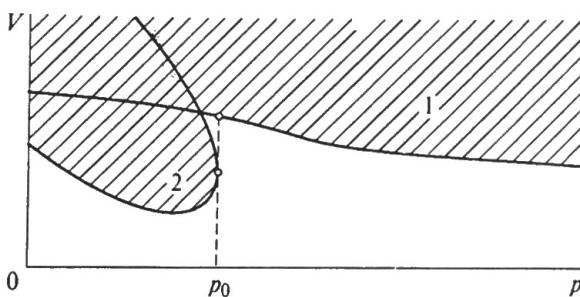


Рис. 12. Область устойчивости на плоскости параметров при нарушении условия 3.

Теорема При изменении параметра системы p в случае общего положения возможны три способа смены критического тона. Они сопровождаются: а) гладкостью $V_c(p)$ (рис. 8), б) разрывом первой производной $V_c(p)$ (рис. 9), в) разрывом $V_c(p)$ (рис. 12). Необходимыми условиями смены критического тона в этих случаях являются соответственно:

а) наличие при $V < V_c$ двукратного собственного значения $\lambda = \alpha \pm i\omega$ ($\alpha, \omega \neq 0$) с жордановой клеткой второго порядка;

б) наличие при $V = V_c$ на мнимой оси простых собственных значений $\lambda = 0, \pm i\omega$ или $\lambda = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ ($\omega_1 \neq \omega_2$):

$$\text{в)} \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_k}{\partial V} = 0 \text{ при } V = V_c.$$

Каждый из трёх возможных способов смены критического тона (а)–(с) связан с некоторым эффектом из теории особенностей и бифуркаций. Так, случай (а) является следствием бифуркации двукратного собственного значения с жордановой клеткой второго порядка, случай (б) связан с особенностями границы области устойчивости, а случай (с) — с разрывом функции критической нагрузки $V_c(p)$ и бифуркацией числа точек пересечения траектории собственного значения с мнимой осью на комплексной плоскости.

Литература

1. Sugiyama Y., Noda T. Studies of stability of two-degrees-of-freedom articulated pipes conveying fluid // Bull. JSME. 1981. V. 24. №194. P. 1354–1362.
2. Seyranian A. P., Pedersen P. On interaction of eigenvalue branches in non-conservative, multi-parameter problems // Dynamics and Vibration of Time-Varying Structures: Conf. on Mech. Vibrat. and Noise. N.Y.: ASME, 1993. P. 19–31.
3. Буньков В. Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента // Тр. ЦАГИ. 1969. Вып. 1166. С. 3–23.
4. Сейранян А. П. Столкновения собственных значений в линейных колебательных системах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 49–58.
5. Bishop R. E. D., Fawzy I. Free and forced oscillation of a vertical tube containing a flowing fluid // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1976. V. 284. №1316. P. 1–47.
6. Келдыш М. В. Вибрации в воздушном потоке крыла с подкосами // Тр. ЦАГИ. 1938. Вып. 357. 39 с. А также в кн.: Келдыш М. В. Механика: Издбр. тр. М.: Наука, 1985. С. 304–341.
7. Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Аэроупругая устойчивость крыла с подкосами (задача Келдыша) // Изв. РАН, МЖГ. 1998. №1. С. 151–162.
8. Pedersen P., Seyranian A. P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability // Int. J. Solids Structures. 1983. V. 19. №4. P. 315–335.
9. Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН. 1972. Т. 27. Вып. 5. С. 119–184.
10. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. Галин Д. М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров // УМН. 1972. Т. 27. Вып. 1. С. 241–242.

■ Поступила в редакцию 7 мая 1998 года; в окончательном варианте 14 марта 2000 года.