ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 379, № 2, с. 165–169

МАТЕМАТИКА

УДК 512.83

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ЖОРДАНОВЫХ ЦЕПОЧЕК ВЕКТОРОВ ДЛЯ МАТРИЦ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

© 2001 г. А. А. Майлыбаев

Представлено академиком Н.С. Бахваловым 05.04.2001 г.

Поступило 06.04.2001 г.

Приведение матрицы к жордановой форме является неустойчивой операцией, если среди собственных значений есть кратные. Сколь угодно малым изменением матрицы можно добиться того, чтобы все собственные значения стали простыми. Однако кратные собственные значения возникают неустранимым образом при рассмотрении семейств матриц, гладко зависящих от параметров, и играют важную роль в задачах устойчивости и оптимизации собственных значений [1–3]. В.И. Арнольд [4, 5] получил локальные нормальные формы семейств комплексных матриц (версальные деформации) и с их помощью провел качественное исследование бифуркационных диаграмм (множеств значений параметров, отвечающих матрицам с кратными собственными значениями). В настоящей работе при помощи теории версальных деформаций получены явные формулы, позволяющие находить кратные собственные значения и соответствующие жордановы цепочки векторов для комплексных и вещественных семейств матриц в условиях точных вычислений. При численных расчетах с использованием стандартных процедур необходимо учитывать, что в отдельных случаях ошибки округления могут приводить к большим погрешностям при вычислении простых собственных значений, используемых в формулах. В работе рассмотрен случай кратных собственных значений, которым отвечает одна жорданова цепочка векторов (одна жорданова клетка). Собственные значения этого вида являются наиболее типичными [4, 5].

Многие авторы исследовали проблему вычисления кратных собственных значений матриц (см., например, [6–9]). Однако имеющиеся в литературе методы не могут быть использованы в случае матриц, зависящих от параметров, и не дают той полноты информации о кратных собственных значениях, которая может быть получена с использованием формул настоящей работы.

Институт механики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

1. Рассмотрим комплексную матрицу $\mathbf{A}$ размерности $m \times m$, аналитически зависящую от вектора комплексных параметров $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Обозначим через λ^d множество значений вектора параметров $\mathbf{p}$, при которых матрица $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ имеет собственное значение алгебраической кратности d, которому отвечает одна жорданова цепочка векторов (одна жорданова клетка), а остальные собственные значения простые. В случае общего положения множество λ^d (страт) является гладким многообразием коразмерности $d - 1$ [4]. Пусть $\mathbf{p}' \in \lambda^d$ – точка на этом многообразии. Обозначим через λ' кратное собственное значение матрицы $\mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{p}')$, а через $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_d$ соответствующую жорданову цепочку векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathbf{A}'\mathbf{u}'_1 = \lambda'\mathbf{u}'_1, \quad \mathbf{A}'\mathbf{u}'_2 = \lambda'\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{A}'\mathbf{u}'_d = \lambda'\mathbf{u}'_d + \mathbf{u}'_{d-1}. \tag{1}$$

Для удобства представления результатов обозначим цепочку Жордана при помощи $(m \times d)$-матрицы $\mathbf{U}' = [\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_d]$.

Пусть $\mathbf{p}_0$ – некоторая точка пространства параметров, расположенная вблизи множества λ^d. В случае общего положения матрица $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{p}_0)$ имеет только простые собственные значения. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0$, которые образуют при $\mathbf{p}_0 \to \mathbf{p}' \in \lambda^d$ кратное собственное значение λ'. Пусть $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i$ – правый и левый собственные векторы, соответствующие λ_i и удовлетворяющие уравнениям

$$\mathbf{A}_0\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_0 = \lambda_i\mathbf{v}_i^T, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{u}_i = 1, \tag{2}$$

где последнее соотношение является условием нормировки. Определим $(m \times d)$-матрицы $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_d]$ и $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_d]$. Введем векторы-строки $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}$ размерности n

$$\mathbf{n}_i = \left(\mathbf{v}_i^T\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p_1}\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i^T\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p_2}\mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{v}_i^T\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p_n}\mathbf{u}_i\right),$$
$$i = 1, 2, \ldots, d, \quad \mathbf{n} = \sum_{i=1}^{d}\frac{\mathbf{n}_i}{d}, \tag{3}$$

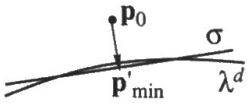

Рис. 1.

где производные вычисляются в точке $\mathbf{p}_0$. Определим $(d \times d)$-матрицы $\mathbf{K} = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_d)$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{Y}$ с компонентами k_i, r_{ij}, s_{ij}, y_{ij}, где

$$k_i = \frac{\sqrt{\mathbf{u}_1^T\bar{\mathbf{u}}_1}}{(\mathbf{u}_i^T\bar{\mathbf{u}}_1)}, \quad r_{ij} = \mu_j^{i-1}, \quad y_{ij} = -s_{id}\mu_j^d,$$
$$\mu_j = \lambda_j - \lambda_0, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d}{d} \tag{4}$$

(здесь $\mu_j^0 = 1$ при нулевых μ_j). Отметим, что для определения векторов и матриц, введенных в (3), (4), требуется только информация о семействе $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ в точке $\mathbf{p}_0$. В следующей теореме приведены формулы, позволяющие по этой информации определить в первом приближении (с точностью до $O(\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}'\|^2)$) множество λ^d вблизи точки $\mathbf{p}_0$, величину кратного собственного значения и соответствующую цепочку Жордана в точках страта λ^d.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ – простые собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0$. Тогда первое приближение страта λ^d, на котором $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ образуют кратное собственное значение λ', определяется системой $d - 1$ линейных уравнений относительно $\mathbf{p}$*

$$q_j^0 + \nabla q_j(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, d-1,$$
$$q_j^0 = \sum_{i=1}^{d} s_{ij}\mu_i^d, \quad \nabla q_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{s_{ij}(\mathbf{n}_i - \mathbf{n})}{s_{id}}. \tag{5}$$

Первое приближение кратного собственного значения λ' и соответствующей цепочки Жордана $\mathbf{U}' = [\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_d]$ в точках страта (5) определяются соотношениями

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda, \quad \Delta\lambda = \mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T, \tag{6}$$

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{U}(\mathbf{K} + \mathbf{K}') + [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_d])\mathbf{S},$$

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{A}_0 - \lambda_i\mathbf{I} - \bar{\mathbf{v}}_i\mathbf{v}_i^T)^{-1}(\mathbf{UKY} + \Delta\lambda\mathbf{UK} - \Delta\mathbf{AUK})^{\langle i\rangle},$$

$$\mathbf{K}' = \mathrm{diag}(k'_1, k'_2, \ldots, k'_d), \tag{7}$$

$$k'_i = -\mathbf{v}_i^T[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_d]\frac{\mathbf{S}^{\langle d\rangle}}{s_{id}},$$

$$\Delta\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p_i}(p_i - p_{0i}),$$

где все производные вычисляются при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$; $\mathbf{S}^{\langle d\rangle}$ обозначает d-й столбец матрицы $\mathbf{S}$; $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Теорема 1 позволяет исследовать структуру страта λ^d и определять кратные собственные значения и цепочки Жордана в точках страта по информации в точке $\mathbf{p}_0$, где матрица имеет лишь простые собственные значения.

Для вывода соотношений (5)–(7) использовалась теория версальных деформаций [4], согласно которой семейство матриц $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ в окрестности точки $\mathbf{p}'$ может быть получено из семейства определенного вида $\mathbf{A}'(\mathbf{q})$ (версальной деформации) при помощи гладкой замены базиса и гладкой замены параметров $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p})$. Страт λ^d определяется уравнениями $q_1 = q_2 = \ldots = q_{d-1} = 0$, где q_i – специальным образом выбранные параметры версальной деформации. Используя линейную аппроксимацию функций $q_i(\mathbf{p})$ в точке $\mathbf{p}_0$, получим систему уравнений (5), где $q_i^0 = q_i(\mathbf{p}_0)$, а ∇q_i – градиент (вектор-строка), вычисленный при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Уравнения (5) определяют плоскость σ в пространстве параметров, которая описывает в первом приближении страт λ^d в окрестности точки $\mathbf{p}_0$ (рис. 1). Значения величин q_i^0, ∇q_i, а также λ', $\mathbf{U}'$ определяются из анализа соотношений, связывающих семейство $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ с версальной деформацией в точке $\mathbf{p}_0$.

Запишем систему (5) в матричном виде

$$\mathbf{Q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T = \mathbf{x}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \nabla q_1 \\ \vdots \\ \nabla q_{d-1} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -q_1^0 \\ \vdots \\ -q_{d-1}^0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $\mathbf{Q}$ – $((d-1) \times n)$-матрица, $\mathbf{x}$ – вектор размерности $d - 1$.

Следствие 1. *При условиях теоремы 1 ближайшее к $\mathbf{p}_0$ значение вектора $\mathbf{p}'_{\min} \in \lambda^d$ (расстояние определяется евклидовой нормой) в первом приближении имеет вид*

$$\mathbf{p}'_{\min} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{x}^T(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\mathbf{Q}}. \tag{9}$$

Рассмотрим страт $\lambda_1^{d_1}\lambda_2^{d_2}\ldots\lambda_s^{d_s}$, состоящий из значений вектора $\mathbf{p}$, при которых матрица $\mathbf{A}(\mathbf{p})$

имеет s различных кратных собственных значений $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_s$, причем каждому собственному значению λ'_i отвечает одна жорданова цепочка длины d_i. Страт $\lambda_1^{d_1}\lambda_2^{d_2}\ldots\lambda_s^{d_s}$ образуется в результате трансверсального пересечения стратов λ^{d_i}, $i = 1, 2, \ldots, s$ [4].

Следствие 2. *Пусть задана точка* $\mathbf{p}_0$ *пространства параметров, где матрица* $\mathbf{A}_0$ *имеет только простые собственные значения. Тогда первым приближением страта* $\lambda_1^{d_1}\lambda_2^{d_2}\ldots\lambda_s^{d_s}$ *в окрестности* $\mathbf{p}_0$ *является пересечение плоскостей* (5), *найденных для каждого кратного собственного значения. Кратные собственные значения и соответствующие цепочки Жордана в точках страта определяются соотношениями* (6), (7) *для каждого* λ'_i.

2. Рассмотрим страт λ^d в пространстве всех комплексных $(m \times m)$-матриц. В этом случае каждый элемент матрицы можно рассматривать как независимый параметр. Заменяя вектор параметров $\mathbf{p}$ матрицей $\mathbf{A}$ и учитывая, что производная матрицы по параметру содержит один ненулевой элемент, равный единице, из теоремы 1 и следствия 1 получим следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ *– простые собственные значения матрицы* $\mathbf{A}_0$. *Тогда первое приближение страта* λ^d, *на котором* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ *образуют кратное собственное значение* λ', *в пространстве комплексных матриц определяется системой* $d - 1$ *линейных уравнений относительно* $\mathbf{p}$

$$q_j^0 + \operatorname{trace}(\mathbf{Q}_j(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)^T) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, d-1,$$

$$q_j^0 = \sum_{i=1}^{d} s_{ij}\mu_i^d, \quad \mathbf{Q}_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{s_{ij}(\mathbf{N}_i - \mathbf{N})}{s_{id}}, \tag{10}$$

где $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$ *– след матрицы* $\mathbf{A}$, *а матрицы* $\mathbf{N}_i$ *и* $\mathbf{N}$ *размерности* $m \times m$ *равны соответственно*

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^T, \quad \mathbf{N} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\mathbf{N}_i}{d}. \tag{11}$$

Первое приближение кратного собственного значения λ' *и соответствующая цепочка Жордана* $\mathbf{U}'$ *в точках страта* (10) *определяются соотношениями*

$$\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda, \quad \Delta\lambda = \operatorname{trace}(\mathbf{N}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)^T), \tag{12}$$

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{U}(\mathbf{K} + \mathbf{K}') + [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_d])\mathbf{S},$$

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{A}_0 - \lambda_i\mathbf{I} - \bar{\mathbf{v}}_i\mathbf{v}_i^T)^{-1} \times$$

$$\times (\mathbf{UKY} + \Delta\lambda\mathbf{UK} - (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)\mathbf{UK})^{\langle i \rangle}, \tag{13}$$

$$\mathbf{K}' = \operatorname{diag}(k'_1, k'_2, \ldots, k'_d),$$

$$k'_i = -\mathbf{v}_i^T[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_d]\frac{\mathbf{S}^{\langle d \rangle}}{s_{id}}.$$

Следствие 3. *При условиях теоремы* 2 *ближайшая к* $\mathbf{A}_0$ *матрица* $\mathbf{A}'_{\min} \in \lambda^d$ (*расстояние определяется евклидовой нормой* $\|\cdot\|_E$) *в первом приближении имеет вид*

$$\mathbf{A}'_{\min} = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \overline{\mathbf{Q}}_j y_j, \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}, \tag{14}$$

где элементы матрицы $\mathbf{P}$ *размерности* $(d - 1) \times (d - 1)$ *равны* $p_{ij} = \operatorname{trace}(Q_i^T\overline{\mathbf{Q}}_j)$; $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *– векторы-столбцы размерности* $d - 1$ *с компонентами* $x_j = -q_j^0$ *и* y_j *соответственно.*

Заметим, что по теореме 2 для определения страта λ^d в окрестности матрицы $\mathbf{A}_0$, кратного собственного значения и соответствующей цепочки Жордана требуются лишь простые собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A}_0$.

3. Рассмотрим вещественную матрицу $\mathbf{A}$, гладко зависящую от вектора вещественных параметров $\mathbf{p}$. В этом случае различаются вещественные и комплексные кратные собственные значения λ'. Соответствующие страты в пространстве параметров обозначаются через α^d и $(\alpha \pm i\omega)^d$ и имеют коразмерности $d - 1$ и $2(d - 1)$ соответственно [4].

Теоремы 1, 2 можно распространить на случай страта $(\alpha \pm i\omega)^d$. При этом соотношения (5) и (10) определяют системы из $2(d - 1)$ линейных уравнений (каждое равенство определяет два уравнения для вещественной и мнимой частей). Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ матрицы $\mathbf{A}_0$, которые формируют кратное комплексное собственное значение λ' при $\mathbf{p}_0 \to \mathbf{p}' \in (\alpha \pm i\omega)^d$, должны иметь одинаковый знак мнимой части (это требование выполняется в точках $\mathbf{p}_0$, достаточно близких к $(\alpha \pm i\omega)^d$).

В случае страта α^d теоремы 1, 2 верны, если задать константы k_i, определяющие элементы диагональной матрицы $\mathbf{K}$, в виде

$$k_i = \frac{1}{(\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}')}, \quad \mathbf{u}' = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}}\right). \tag{15}$$

С учетом условий (15) соотношения (5) и (10) определяют системы из $d - 1$ вещественных линейных уравнений, а соотношения (6), (7), (11), (12) – вещественные значения λ' и $\mathbf{U}'$. Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ матрицы $\mathbf{A}_0$, которые формируют кратное вещественное собственное значе-

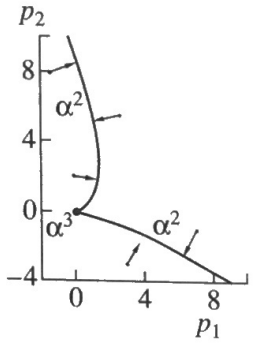

Рис. 2.

ние λ' при $\mathbf{p}_0 \to \mathbf{p}' \in \alpha^d$, должны быть вещественными или комплексно-сопряженными.

4. В качестве примера рассмотрим двухпараметрическое семейство вещественных матриц

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ p_1 & 1 & p_2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2). \tag{16}$$

По теореме 1 уравнение страта α^2 в первом приближении имеет вид

$$q_1^0 + \nabla q_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T = 0, \tag{17}$$

где $q_1^0 = \mu^2$, $\nabla q_1 = \mu(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)$ и $\mu = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$. Ближайший к $\mathbf{p}_0$ вектор $\mathbf{p}'_{\min} \in \alpha^2$ определяется из следствия 1 в виде

$$\mathbf{p}'_{\min} = \mathbf{p}_0 - \frac{q_1^0}{\nabla q_1 \nabla q_1^T} \nabla q_1. \tag{18}$$

На рис. 2 приведена бифуркационная диаграмма (страты α^2 и α^3) в пространстве параметров. При помощи стрелок изображены векторы $\mathbf{p}'_{\min} - \mathbf{p}_0$, где $\mathbf{p}_0$ – различные значения вектора параметров, $\mathbf{p}'_{\min}$ – ближайшие точки страта α^2, найденные приближенно по формуле (18). В вычислениях λ_1, λ_2 полагали равными комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы $\mathbf{A}_0$. Если же три собственных значения матрицы $\mathbf{A}_0$ оказывались вещественными, то рассматривали все три возможные пары λ_1, λ_2 и в результате выбирали ближайший из трех полученных векторов $\mathbf{p}'_{\min}$ (в каждом из вариантов определяется значение $\mathbf{p}'_{\min}$, при котором данная пара собственных значений образует двукратное собственное значение λ'). Из рис. 2 видно, что формула (18) дает хорошую аппроксимацию ближайшего вектора $\mathbf{p}'_{\min} \in \alpha^2$ для рассматриваемых точек $\mathbf{p}_0$.

Рассмотрим точку $\mathbf{p}_0 = (0.3, 9.1)$, где матрица $\mathbf{A}_0$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -2.624$, $\lambda_2 = -1.472$, $\lambda_3 = -7.096$. Вычисления с помощью формулы (18) показывают, что пара λ_1, λ_2 дает ближайшее значение вектора $\mathbf{p}'_{\min} = (-0.0008, 8.9990) \in \alpha^2$. Вычисленные в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_{\min}$ по приближенным формулам (6), (7) кратное собственное значение λ' и цепочка Жордана (собственный вектор $\mathbf{u}'_1$ и присоединенный вектор $\mathbf{u}'_2$) имеют вид

$$\lambda' = -2.00006,$$

$$\mathbf{U}' = [\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2] = \begin{pmatrix} 0.7044 & 0.1496 \\ -0.7044 & 0.0852 \\ 0.2346 & -0.1067 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Для сравнения приведем точные значения величин $\mathbf{p}'_{\min}$, λ' и $\mathbf{U}'$

$$\mathbf{p}'_{\min} = (0, 9), \quad \lambda' = -2,$$

$$[\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2] = \begin{pmatrix} 0.7044 & 0.1494 \\ -0.7044 & 0.0854 \\ 0.2348 & -0.1067 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Из сравнения (19) и (20) видно, что приближенные значения, полученные при помощи теоремы 1, отличаются от точных лишь в четвертом знаке.

5. Рассмотрим страт α^4 в пространстве вещественных матриц. Возьмем матрицу $\mathbf{A}_d \in \alpha^4$ порядка 10×10, приведенную к жордановой форме и имеющую простые собственные значения $\lambda = -4$, -3, -2, -1, 0, 4 и жорданов блок размера 4×4 с собственным значением $\lambda = 2$. Рассмотрим возмущения матрицы $\mathbf{A}_d$ вида

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_d + \mathbf{D},$$

где $\mathbf{D}$ – вещественная матрица порядка 10×10, элементы которой являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 4 \cdot 10^{-4}$ ($\|\mathbf{D}\|_E \sim 0.2$). Используя в качестве λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ближайшие к $\lambda = 2$ простые собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0$, по формулам (10), (14) найдем ближайшую вещественную матрицу $\mathbf{A}'_{\min} \in \alpha^4$ и расстояние $\|\mathbf{A}'_{\min} - \mathbf{A}_0\|_E$ от матрицы $\mathbf{A}_0$ до страта α^4. Среднее значение квадрата этого расстояния, полученного в результате численных расчетов для 1000 случайных матриц $\mathbf{D}$, равно $1.193 \cdot 10^{-3}$. Так как страт α^4 имеет коразмерность 3, то математическое ожидание величины $\|\mathbf{D}_n\|_E^2$, где $\mathbf{D}_n$ – нормальная к α^4

составляющая матрицы возмущения **D**, составляет $3\sigma^2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$, что хорошо согласуется с численными расчетами.

Таким образом, приведенные в теоремах 1, 2 приближенные формулы позволяют эффективно анализировать кратные собственные значения, которым отвечает одна цепочка Жордана, в случае комплексных и вещественных семейств матриц. Для этого требуются только производные матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ по параметрам в точке $\mathbf{p}_0$, а также простые собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы $\mathbf{A}_0$. Данная информация легко может быть получена с помощью стандартных программ вычисления собственных значений матриц, что делает предлагаемый подход конструктивным и применимым для численных расчетов.

Автор благодарит А.П. Сейраняна, обратившего внимание автора на данную проблему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mailybaev A.A., Seyranian A.P.* // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2000. V. 21. № 1. P. 106–128.
2. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* // ПММ. 2000. В. 6. С. 947–962.
3. *Lewis A.S., Overton M.L.* // Acta numerica. 1996. V. 5. P. 149–190.
4. *Арнольд В.И.* // УМН. 1971. Т. 26. В. 2. С. 101–114.
5. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
7. *Kågström B., Ruhe A.* // ACM Trans. Math. Software. 1980. V. 6. P. 398–419.
8. *Fairgrieve T.F.* The Application of Singularity Theory to the Computation of Jordan Canonical Form. M.Sc. Thesis. Toronto: Department of Computer Science, Univ. Toronto, 1986.
9. *Lippert R., Edelman A.* In: Advances in Computational Mathematics, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. N.Y.: Marcel Dekker, 1999. V. 202.