

УДК 531.36

ВИБРАЦИОННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ

© 2009 г. А. П. Сейранян, А. А. Майлыбаев

Представлено академиком В.Ф. Журавлевым 13.01.2009 г.

Поступило 20.01.2009 г.

Сто лет назад А. Стефенсон [1, 2] показал, что верхнее статически неустойчивое положение равновесия одно-, двух- и трехзвенного маятников может быть стабилизировано с помощью вибрации точки подвеса достаточно высокой частоты. Среди многих других исследований, посвященных стабилизации статически неустойчивых систем с помощью вибрации, отметим работы [3–10]. Все перечисленные работы посвящены высокочастотной стабилизации. В настоящей работе исследуется возможность стабилизации статически неустойчивых систем с помощью вибрации произвольной частоты. Рассматриваются конечномерные слабо неустойчивые системы, т.е. близкие к критическим. Получено условие вибрационной стабилизации с произвольной (нерезонансной) частотой возбуждения. В качестве частного случая исследовано высокочастотное возбуждение. На конкретных примерах систем с одной и двумя степенями свободы показано, что вибрационная стабилизация возможна на всем диапазоне частот – при низких, средних и высоких частотах возбуждения.

1. Рассмотрим линейную колебательную систему

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(p) + \delta\mathbf{B}(t))\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{B} – действительные симметрические матрицы размерности $n \times n$, p и δ – действительные параметры, а точками обозначено дифференцирование по времени t . Предполагается, что матрица \mathbf{M} положительно определена, а матрица $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t + T)$ – периодическая по времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ и частотой Ω . Положив $\delta = 0$,

получим автономную консервативную систему

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0. \quad (2)$$

Система устойчива, если матрица $\mathbf{C}(p)$ положительно определена. В этом случае собственные

частоты $0 < \omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$ и моды колебаний $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ удовлетворяют уравнениям и условиям ортонормировки

$$\mathbf{C}\mathbf{w}_k = \omega_k^2 \mathbf{M}\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k^T \mathbf{M}\mathbf{w}_{k'} = \delta_k^{k'}, \quad k, k' = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где $\delta_k^{k'}$ – символ Кронекера. Уравнения (1)–(3) не меняются при преобразовании

$$t = T\tilde{t}, \quad \mathbf{C} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{T^2}, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{t})}{T^2}, \quad \omega_k = \frac{\tilde{\omega}_k}{T}, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{t} + \tilde{T})$ имеет период $\tilde{T} = 1$. Далее полагаем $T = 1$, опуская тильды.

Пусть $p = p_0$ – критическое значение, так что система (2) устойчива при $p < p_0$ и неустойчива при $p > p_0$. Рассмотрим невырожденный случай, когда при $p = p_0$ частота $\omega_1 = 0$, а $0 < \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. Нулевой частоте соответствует собственный вектор \mathbf{w}_1 матрицы $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}(p_0)$ (форма потери устойчивости)

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{w}_1 = 0. \quad (5)$$

Так как система устойчива при $p < p_0$, то матрица

$\mathbf{C}(p) \approx \mathbf{C}_0 + \frac{d\mathbf{C}}{dp} \Delta p$ положительно определена при малых отрицательных $\Delta p = p - p_0$. В частности, $\mathbf{w}_1^T \mathbf{C} \mathbf{w}_1 > 0$, что с учетом (5) приводит к условию

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1 < 0, \quad \mathbf{C}_1 = \left. \frac{d\mathbf{C}}{dp} \right|_{p=p_0}. \quad (6)$$

Систему (1) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(p) + \delta\mathbf{B}(t)) & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\delta = p - p_0 = 0$ матрица $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(t)$ не зависит от времени и имеет двукратное нулевое собственное значение с жордановой клеткой второго порядка.

Соответствующие правые и левые собственные и присоединенные векторы определяются уравнениями и условиями ортонормировки

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 = 0, \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{A}_0 = \mathbf{v}_0^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0^T \mathbf{u}_1 = 1$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Mw}_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Mw}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ системы (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ с начальным условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Матрица монодромии определяется как $\mathbf{F} = \mathbf{X}(1)$. Ее собственные значения ρ называются мультипликаторами. Мультипликаторы системы (1) обладают симметрией: если ρ является мультипликатором, то $\frac{1}{\rho}$ также является мультипликатором. Система устойчива тогда и только тогда, когда все мультипликаторы лежат на единичной окружности $|\rho| = 1$ и не образуют жордановых клеток.

При $\delta = p - p_0 = 0$ система автономна. Следовательно, $\mathbf{X}_0(t) = \exp(t\mathbf{A}_0)$ и $\mathbf{F}_0 = \exp(\mathbf{A}_0)$, а мультипликаторы $\rho = \exp(\pm i\omega_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Нетрудно понять, что при $k = 1$ двукратный мультипликатор $\rho = 1$ матрицы \mathbf{F}_0 образует жорданову клетку с теми же собственными и присоединенными векторами (9). Ниже предполагается, что остальные мультипликаторы $\rho = \exp(\pm i\omega_k)$, $k = 2, 3, \dots, n$ являются простыми и комплексными, т.е. система находится вне резонанса. Это означает, что

$$\omega_k \pm \omega_{k'} \neq 2\pi j \quad (10)$$

для любых положительных целых чисел k, k', j .

Для произвольного периода $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ это условие

принимает вид $\Omega \neq \frac{\omega_k \pm \omega_{k'}}{j}$. При малых возмущениях параметров p и δ простые мультипликаторы остаются на единичной окружности $|\rho| = 1$. Следовательно, для анализа устойчивости в окрестности $p = p_0$, $\delta = 0$ следует исследовать распад двукратного мультипликатора $\rho = 1$ при изменении параметров.

Заметим, что анализ устойчивости в резонансных случаях $\omega_k \pm \omega_{k'} \approx 2\pi j$ с $k, k' > 1$ может быть проведен с использованием методов теории пара-

метрического резонанса [11]. Резонансы при $k' = 1$ (так что $\omega_k \approx 2\pi j$) являются вырожденными: в точке резонанса кратность мультипликатора $\rho = 1$ возрастает до 4. Эти случаи требуют специального изучения.

Распад двукратного мультипликатора описывается асимптотической формулой [11]

$$\rho = 1 \pm \sqrt{g_p \Delta p + g_\delta \delta}, \quad g_\alpha = \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} \mathbf{u}_0, \quad \alpha \in \{p, \delta\}, \quad (11)$$

где производные матрицы монодромии при $p = p_0$, $\delta = 0$ равны

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \mathbf{F}_0 \int_0^1 \mathbf{H}_\alpha(t) dt, \quad \mathbf{H}_\alpha(t) = \mathbf{X}_0^{-1}(t) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \mathbf{X}_0(t). \quad (12)$$

Используя (7)–(9), (12) в (11), находим

$$g_p = -\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1, \quad g_\delta = -\mathbf{w}_1^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{w}_1, \quad \bar{\mathbf{B}} = \int_0^1 \mathbf{B}(t) dt. \quad (13)$$

Равенство $|\rho| = 1$ с учетом (11), (13) дает условие устойчивости первого порядка

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1 (p - p_0) + \mathbf{w}_1^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{w}_1 \delta > 0. \quad (14)$$

Ниже рассмотрим случай $\bar{\mathbf{B}} = 0$. Тогда в первом приближении из (14) имеем $p < p_0$ (напомним, что $\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1 < 0$). Таким образом, эффект стабилизации описывается аппроксимацией второго порядка. В общем случае условие стабилизации имеет вид

$$p < p_0 + \frac{a\delta^2}{2} + o(\delta^2) \quad (15)$$

с неизвестным коэффициентом a . Критическое значение p (граница устойчивости)

$$p_{cr} = p_0 + \frac{a\delta^2}{2} + o(\delta^2). \quad (16)$$

Рассмотрим возмущение вдоль границы устойчивости

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{a\delta^2}{2} + o(\delta^2).$$

Так как $\Delta p \sim \delta^2$ и $g_\delta = 0$, то квадратный корень в (11) пропорционален δ и, следовательно, превосходит по порядку точность аппроксимации $o(\delta^{1/2})$. В этом вырожденном случае асимптотическое выражение для ρ начинается с члена первой степени по δ [11]

$$\rho = 1 + \mu\delta + o(\delta), \quad (17)$$

где значения μ определяются из квадратного уравнения $\mu^2 + \alpha_1\mu + \alpha_2 = 0$ с коэффициентами

$$\alpha_1 = -\mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \mathbf{u}_0,$$

$$\alpha_2 = \mathbf{v}_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \mathbf{G}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \delta^2} \right) \mathbf{u}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \mathbf{u}_0 \frac{d^2 p}{d \delta^2}, \quad (18)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_0 - \mathbf{I} + \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \delta^2} = 2 \mathbf{F}_0 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{H}_\delta(t) \mathbf{H}_\delta(\tau) d\tau dt.$$

Используя (7)–(9), (12) в (18), найдем $\alpha_1 = \mathbf{w}_0^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{w}_0 = 0$ ввиду $\bar{\mathbf{B}} = 0$. Тогда $\mu = \pm \sqrt{-\alpha_2}$. Условие устойчивости $|\rho| = 1$ с разложением (17) дает $\alpha_2 > 0$; уравнение $\alpha_2 = 0$ является критическим (дает границу устойчивости). Согласно (11), (13), (16) последний член для α_2 в (18) равен $\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1 \frac{a}{2}$. Используя (18) в условии $\alpha_2 = 0$, определяем константу

$$a = 2 \mathbf{v}_0^T \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \delta^2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \mathbf{G}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} \right) \frac{\mathbf{u}_0}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1}. \quad (19)$$

Выражение (16) с коэффициентом a , найденным в (19), дает критическую нагрузку системы при параметрическом возбуждении. Пусть значение параметра p задано, причем $p > p_0$ (система статически неустойчива). Стабилизация системы параметрическим возбуждением возможна лишь при $a > 0$. Тогда согласно (15) система стабилизируется при амплитуде возбуждения $\delta > \sqrt{\frac{2\Delta p}{a}}$.

2. Для приложений полезно выразить коэффициент a в (19) через частоты ω_k и моды \mathbf{w}_k консервативной системы (2), (3). Можно показать, что этот коэффициент представляется в виде интеграла

$$a = \frac{4}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[B_1(t) B_1(\tau) (t-1)\tau + \sum_{k=2}^n \operatorname{Im} \frac{B_k(t) B_k(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)}}{\omega_k(1 - e^{i\omega_k})} \right] d\tau dt, \quad (20)$$

где действительные скалярные величины $B_k(t) = \mathbf{w}_1^T \mathbf{B}(t) \mathbf{w}_k$ описывают взаимодействие мод. Для систем с произвольным периодом T обратная подстановка величин (4) в (20) приводит к интегралу

$$a = \frac{4}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B_1(t) B_1(\tau) (t-T)\tau}{T^2} + \sum_{k=2}^n \operatorname{Im} \frac{B_k(t) B_k(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)}}{\omega_k T (1 - e^{i\omega_k T})} \right] d\tau dt. \quad (21)$$

Соотношение (21) определяет изменение критической нагрузки (16) через частоты и моды исходной невозмущенной системы.

В частном случае гармонического возбуждения $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cos \Omega t$ интегрирование в соотношении (21) дает

$$a = -\frac{1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{w}_1^T \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_k)^2}{\Omega^2 - \omega_k^2}. \quad (22)$$

Согласно (6) имеем $\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1 < 0$. Следовательно, в случае гармонического возбуждения собственные моды, отвечающие частотам $\omega_k < \Omega$, соответствуют положительным членам в выражении для коэффициента a (стабилизирующий эффект), а моды, отвечающие частотам $\omega_k > \Omega$, соответствуют отрицательным членам (дестабилизирующий эффект). Член, отвечающий критической моде $\omega_1 = 0$, всегда положительный (стабилизация).

3. Исследуем влияние малой диссипации для системы вида

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \gamma \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(p) + \delta \mathbf{B}(t)) \mathbf{q} = 0, \quad (23)$$

где \mathbf{D} – действительная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$, $\gamma > 0$ – малый параметр диссипации.

Критический параметр $p_{cr}(\delta, \gamma)$ можно разложить в ряд по степеням δ и γ . При отсутствии параметрического возбуждения $\delta = 0$ диссипативные силы не влияют на критическое значение параметра p [12]. Следовательно, $p_{cr}(0, \gamma) \equiv p_0$, т.е. члены вида γ^k , $k = 1, 2, \dots$, в разложении $p_{cr}(\delta, \gamma)$ отсутствуют. Исследуя систему (23) при фиксированном параметре диссипации $\gamma > 0$ методом теории возмущений (подобно случаю $\gamma = 0$), можно показать, что в разложении $p_{cr}(\delta, \gamma)$ также отсутствуют члены вида $\gamma^k \delta$.

Таким образом, влияние малых диссипативных сил сводится главным образом к изменению коэффициента a в соотношении для критической нагрузки (16)

$$p_{cr} = p_0 + \frac{a(\gamma) \delta^2}{2} + o(\delta^2), \quad (24)$$

где $a(0)$ дается выражением (21). Видно, что влияние диссипативных сил, как правило, очень мало. Если матрица возбуждения обратима во времени $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t_0 - t)$ для некоторого t_0 , то система (23) инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow t_0 - t$ и

$\gamma \rightarrow -\gamma$. Следовательно, нечетные степени γ , изменяющие знак при этом преобразовании, не могут появиться в разложении $p_{cr}(\delta, \gamma)$. В этом случае первая корректирующая поправка при учете диссипации имеет порядок $\gamma^2 \delta^2$.

4. Высокочастотным возбуждением называется случай, когда частота Ω значительно превосходит все собственные частоты системы $\omega_2, \dots, \omega_n$. Тогда $\omega_k T \ll 1$, так что можно разложить экспоненты в выражении (21) по степеням малых величин $\omega_k T$ и $\omega_k(t - \tau)$. В результате ряда преобразований получим

$$a = \frac{4}{T^2 \mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \times \sum_{k=1}^n \int_0^T \int_0^t B_k(t) B_k(\tau) (t - T) \tau d\tau dt + O(T^4). \quad (25)$$

Эта формула является высокочастотной асимптотикой выражения (21). Так как интеграл в (25) имеет порядок T^4 , то $a \sim T^2 \sim \Omega^{-2}$.

Представим матрицу $\mathbf{B}(t)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{B}'_m \cos(m\Omega t) + \mathbf{B}''_m \sin(m\Omega t), \quad (26)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

(постоянный член отсутствует ввиду $\bar{\mathbf{B}} = 0$). Подставляя (26) в (25), выполняя интегрирование и суммирование по k , можно привести это выражение к виду

$$a = -\frac{1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{w}_1^T (\mathbf{B}'_m \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}'_m + \mathbf{B}''_m \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}''_m) \mathbf{w}_1}{(m\Omega)^2} + O(\Omega^{-4}). \quad (27)$$

Формула (27) выражает коэффициент a в высокочастотном пределе через коэффициенты Фурье матрицы возбуждения $\mathbf{B}(t)$. Заметим, что формулу (27) можно также получить с помощью метода усреднения.

В частном случае $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cos \Omega t$ соотношение (27) принимает вид

$$a = -\frac{\mathbf{w}_1^T \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \Omega^{-2} + O(\Omega^{-4}). \quad (28)$$

Это выражение можно также представить в виде ряда

$$a = -\frac{\Omega^{-2}}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1} \sum_{k=1}^n (\mathbf{w}_1^T \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_k)^2 + O(\Omega^{-4}), \quad (29)$$

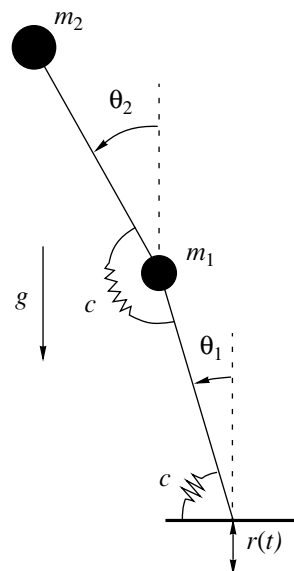


Рис. 1. Перевернутый маятник с периодическим возбуждением основания.

который согласуется с формулой (22) для высокой частоты возбуждения Ω .

5. В качестве первого примера рассмотрим систему с одной степенью свободы, для которой (1) является уравнением Хилла

$$\ddot{q} + (-p + \delta b(t))q = 0, \quad (30)$$

где $b(t)$ – периодическая функция с периодом T и нулевым средним. Тогда из выражений (15) и (21) в первом приближении получим область стабилизации в виде

$$p < \frac{a\delta^2}{2}, \quad a = \frac{4}{T} \int_0^T b(t) \int_0^t b(\tau) \tau d\tau dt - \frac{2}{T^2} \left(\int_0^T b(t) t dt \right)^2. \quad (31)$$

При $T = 2\pi$ эта формула совпадает с полученной ранее в статье [10]. Если $b(t) = \cos t$, то $a = 1$, что хорошо известно.

В качестве второго примера рассмотрим перевернутый двойной маятник, состоящий из двух сосредоточенных масс m_1 и m_2 , соединенных жесткими безмассовыми стержнями равной длины l с шарнирами жесткости c , в поле силы тяжести (рис. 1). Функция Лагранжа $L = K - V$ системы определяется выражениями

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 + \\
&+ m_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2), \\
V &= \frac{c\theta_1^2}{2} + \frac{c(\theta_2 - \theta_1)^2}{2} + \\
&+ (m_1 + m_2)gl\cos\theta_1 + m_2gl\cos\theta_2,
\end{aligned} \quad (32)$$

где g – ускорение свободного падения. Рассмотрим периодическое возбуждение основания $z = a\cos\Omega t$. Тогда согласно принципу Даламбера следует подставить $g + \ddot{z}$ вместо g . Уравнения движения системы находятся с помощью функции Лагранжа и линеаризуются в окрестности вертикального положения $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Введем безразмерные время и параметры

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \Omega^* t, \quad \delta = \frac{a}{l}, \quad p = -\frac{c}{m_1 g l}, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega^*}, \\
\eta &= \frac{m_2}{m_1},
\end{aligned} \quad (33)$$

где $\Omega^* = \sqrt{\frac{g}{l}}$. В безразмерных переменных линеаризованные уравнения движения системы принимают вид (1) с $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0\cos\Omega t$ и матрицами

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \eta + 1 & \eta \\ \eta & \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2p - \eta - 1 & p \\ p & -p - \eta \end{pmatrix}, \\
\mathbf{B}_0 &= \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 + \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (34)$$

Здесь и ниже тильды опускаем. Отрицательный параметр p введен для того, чтобы неустойчивость определялась условием вида $p > p_0$. Учитывая силы вязкого трения в шарнирах, определяемые диссипативной функцией $F = \frac{\gamma\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{\gamma(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2}{2}$, придем к системе вида (23) с безразмерным параметром диссипации $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\Omega^* m_1 l^2}$ и матрицей

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В случае $\delta = 0$ система устойчива тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{C} положительно определена. Это условие приводит к неравенству

$$p < p_0, \quad p_0 = -\frac{3\eta + 1 + \sqrt{5\eta^2 + 2\eta + 1}}{2}. \quad (36)$$

При $p = p_0$ найдем частоты и соответствующие моды из (3) и (34) в виде

$$\omega_1 = 0, \quad \mathbf{w}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} p_0 \\ 2p_0 + \eta + 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \sqrt{-\left(5 + \frac{1}{\eta}\right)p_0 - 2(\eta + 1)}, \\
\mathbf{w}_2 &= \alpha_2 \begin{pmatrix} \eta + \omega_2^2\eta + p_0 \\ -\omega_2^2\eta + p_0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \quad (38)$$

где множители α_1 и α_2 определяются из условий ортонормировки (3).

Коэффициент a находится из формулы (22) в виде

$$\begin{aligned}
a &= a_1\Omega^2 + \frac{a_2\Omega^4}{\Omega^2 - \omega_2^2}, \quad a_k = \frac{(\mathbf{w}_1^T \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_k)^2}{\Omega^4 \mathbf{w}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{w}_1}, \\
k &= 1, 2.
\end{aligned} \quad (39)$$

Согласно (34) коэффициенты a_1 и a_2 зависят только от параметра соотношения масс η . Обе величины a_1 и a_2 неотрицательны, причем $a_2 = 0$ при $\eta = 0$ и 1. Условие устойчивости дается неравенством (15), которое с учетом (39) можно записать в виде

$$\left(a_1 + \frac{a_2\Omega^2}{\Omega^2 - \omega_2^2}\right) \frac{\delta^2\Omega^2}{2} > \Delta p, \quad \Delta p = p - p_0. \quad (40)$$

Второй член в скобках описывает влияние второй моды ω_2 . Влияние этого члена незначительно при $\eta \approx 2$, когда $a_2 \ll a_1$, но его роль возрастает при больших η .

Неравенство (40) является условием стабилизации первой моды, которая неустойчива при отсутствии возбуждения ($\delta = 0$). Следовательно, условие (40) является необходимым условием стабилизации, определяющим нижнюю границу амплитуды стабилизации δ . Неустойчивость может быть также связана со второй модой вследствие резонансов, давая верхнюю границу амплитуды стабилизации.

При $\Omega \approx \frac{2\omega_2}{j}$ с целым числом j система подвержена параметрическому резонансу. Известно, что при гармоническом возбуждении резонансы, соответствующие $j > 1$, эффективно подавляются введением демпфирующего члена $\gamma\mathbf{D}$ в уравнение (23). Основной резонанс $\Omega \approx 2\omega_2$ является наиболее важной областью неустойчивости. В первом приближении эта область определяется неравенством [11]

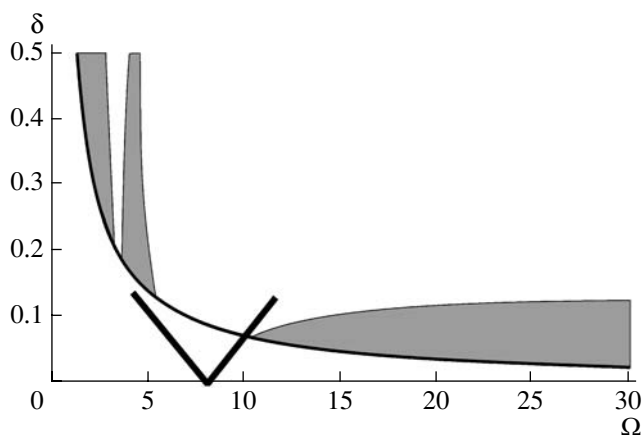


Рис. 2. Диаграмма устойчивости при $\eta = 1$ и $\Delta p = 0.5$.

$$\zeta^2 \gamma^2 + (\Omega - 2\omega_2)^2 < \xi \delta^2, \quad \zeta = \mathbf{w}_2^T \mathbf{D} \mathbf{w}_2, \quad (41)$$

$$\xi = \frac{(\mathbf{w}_2^T \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_2)^2}{4\omega_2^2}.$$

Случай $\Omega \approx \frac{\omega_2}{j}$ отвечает особому случаю неустойчивости, связанному с мультипликатором $\rho = 1$ кратности 4, и требует специального исследования.

Рассмотрим два конкретных значения η . При $\eta = 1$ (равенство масс $m_1 = m_2$) $p_0 = -3.414$, $\omega_2 = 4.040$ и коэффициенты $a_1 = 2$, $a_2 = 0$. Тогда условие стабилизации (40) упрощается:

$$\delta^2 \Omega^2 > \Delta p. \quad (42)$$

Это вырожденный случай, поскольку влияние второй моды исчезает и условие высокочастотной стабилизации становится применимым на всем диапазоне частот возбуждения Ω .

На рисунке 2 показана диаграмма устойчивости, полученная численно при $\eta = 1$, $\Delta p = 0.5$ и коэффициенте демпфирования $\gamma = 0.01$ с помощью метода Флоке (вычисление мультипликаторов системы ρ и проверка условия асимптотической устойчивости $|\rho| < 1$). Область устойчивости (стабилизации) закрашена серым цветом. Нижняя граница области устойчивости (42), полученная аналитически, отлично согласуется с численными результатами расчета границы. На рисунке 2 видны резонансы при $\Omega \approx \omega_2$ и $2\omega_2$. Область основного резонанса (41) показана жирной V-образной линией; эта аппроксимация, разумеется, неточная при больших амплитудах δ .

Положив $\eta = 10$, найдем $p_0 = -26.91$, $\omega_2 = 10.74$, и условие (40) принимает вид

$$\left(14.34 + \frac{22.30\Omega^2}{\Omega^2 - 10.74^2} \right) \frac{\delta^2 \Omega^2}{2} > \Delta p. \quad (43)$$

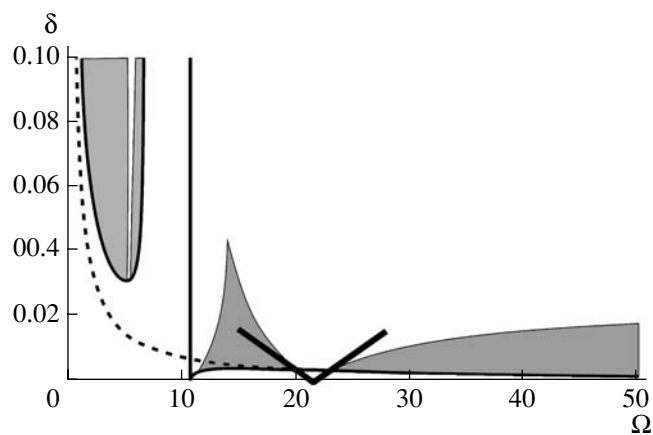


Рис. 3. Диаграмма устойчивости при $\eta = 10$ и $\Delta p = 0.1$.

Для высоких частот возбуждения $\Omega \gg \omega_2$ это условие сводится к следующему:

$$18.32\delta^2 \Omega^2 > \Delta p. \quad (44)$$

На рисунке 3 показана диаграмма устойчивости, найденная численно при $\eta = 10$, $\Delta p = 0.1$ и $\gamma = 0.01$ с помощью метода Флоке. Нижняя граница области устойчивости (43) показана сплошными линиями. Этот теоретический результат отлично согласуется с численными расчетами. Высокочастотная асимптотика (44) показана штриховой линией. Для частот $\Omega \geq 20$ границы, определяемые выражениями (43) и (44), очень близки.

Верхняя граница области устойчивости (стабилизации) соответствует резонансам, когда вторая мода становится неустойчивой. На рисунке 3 при $\Omega \approx \frac{2\omega_2}{k}$, $k = 1, 2$ и 4 , видны резонансные области.

Аппроксимация области основного резонанса (41) показана сплошной V-образной линией. Верхняя граница слабо зависит от малого пара-

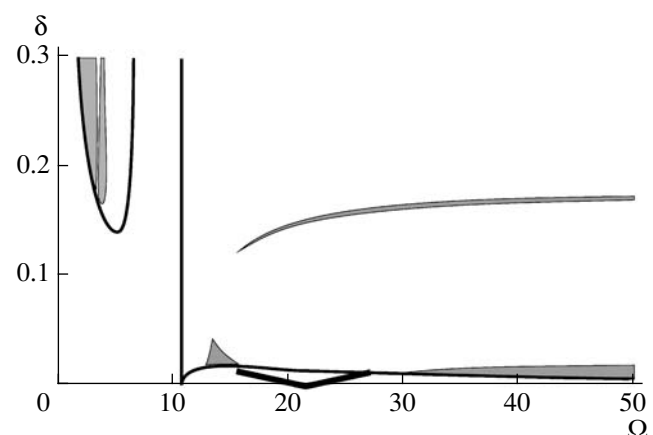


Рис. 4. Диаграмма устойчивости при $\eta = 10$ и $\Delta p = 2$.

метра Δp . На рисунке 3 показан случай достаточно малого значения $\Delta p = 0.1$. С возрастанием Δp нижняя граница области устойчивости возрастает, и средняя область стабилизации исчезает вообще приблизительно при $\Delta p \sim 10$, в то время как низкочастотная область стабилизации сдвигается к более высоким амплитудам δ и становится тоньше из-за резонансов. Это демонстрирует рис. 4, отвечающий случаю $\Delta p = 2$.

Таким образом, показано, что стабилизация периодическим воздействием вне областей резонанса возможна на всем интервале частот – при низких, средних и высоких частотах возбуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК–4244.2008.1 и фонда INTAS, грант 06–1000013–9019.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stephenson A.* On a New Type of Dynamical Stability // Mem. Proc. Manchester Literary and Philos. Soc. 1908. V. 52. № 8. P. 1–10.
2. *Stephenson A.* On Induced Stability // Philos. Mag. 1909. V. 17. P. 765–766.
3. *Капица П.Л.* // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. № 5. С. 588–597.
4. *Челомей В.Н.* // ДАН. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.
5. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. *Acheson D.J.* // Proc. Roy. Soc. London. 1993. V. 443. P. 239–245.
7. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 394 с.
8. *Champneys A.R., Fraser W.B.* // Proc. Roy. Soc. London. A. 2000. V. 456. P. 553–570.
9. *Thomsen J.J.* Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis and Tools. В.: Springer, 2003.
10. *Сейранян А.А., Сейранян А.П.* // ПММ. 2006. Т. 70. № 5. С. 835–843.
11. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. New Jersey: World Sci., 2004.
12. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 175 с.