

УДК 531.2

ВЛИЯНИЕ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С КРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ И ПАРАДОКС НИКОЛАИ

© 2011 г. А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян

Представлено академиком С.С. Григоряном 25.05.2010 г.

Поступило 27.05.2010 г.

В 1928 году Е.Л. Николаи впервые рассмотрел задачу об устойчивости упругой системы, нагруженной следящими силами [1]. В этой работе он поставил задачу об устойчивости прямолинейной формы равновесия упругого стержня, один из концов которого зашпелен, а другой нагружен сжимающей силой и скручивающим следящим (тангенциальным) моментом. Николаи показал, что в случае равных главных моментов инерции сечения стержень не имеет статических форм потери устойчивости, но теряет устойчивость динамически при сколь угодно малых значениях скручивающего момента. Этот эффект известен как парадокс Николаи. В работах [1, 2] Е.Л. Николаи показал, что наличие малой диссипации или неравенство главных моментов инерции сечения стержня приводят к стабилизации системы. Эти две важные статьи Е.Л. Николаи вошли в сборник его избранных трудов [3]. Отметим, что для исследования устойчивости тривиального решения и анализа стабилизации стержня Николаи использовал дискретную модель — с двумя степенями свободы и сосредоточенной массой. О парадоксе Николаи и развитии дальнейших исследований в этой области см. [4].

В работе формулируется задача о неустойчивости консервативной системы с произвольным числом степеней свободы при добавлении малых неконсервативных сил (позиционных и диссипативных). Неустойчивость может возникнуть, когда консервативная система имеет кратную частоту колебаний. В терминах матриц возмущений и собственных векторов, соответствующих двукратной частоте, получена область неустойчивости. При отсутствии диссипации эта область ограничена конической поверхностью. Полученные результаты обобщаются на случай частоты произвольной кратности. В частности, показано, что добавление сколь угодно малых циркуляционных сил типично приводит к дестабилизации

системы с кратной частотой. Затем наряду с неконсервативными позиционными силами исследуется влияние малых диссипативных сил. Показано, что при добавлении сколь угодно малой диссипации в общем случае область неустойчивости из конуса превращается в двуполостной гиперболоид, увеличиваясь при этом скачком (эффект дестабилизации). Лишь при некоторых особых значениях отношений коэффициентов демпфирования система стабилизируется малыми диссипативными силами.

В качестве континуального аналога потенциальной системы с малыми неконсервативными и диссипативными силами рассматривается задача Николаи об упругой устойчивости сжатого и скрученного консольного стержня, при этом приложенный крутящий момент считается тангенциальным. Получена формула для области неустойчивости с учетом малого различия главных моментов инерции сечения стержня, а также малых внутренних и внешних диссипативных сил. Для описания внутреннего трения используется вязкоупругая модель Кельвина—Фойгта. Исследована зависимость области неустойчивости от значения осевой силы. Оказалось, что полученная формула для области неустойчивости верна, если тангенциальный крутящий момент заменить на аксиальный. Этот факт следует из сопряженности соответствующих задач на собственные значения.

ВОЗМУЩЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С РАВНЫМИ ЧАСТОТАМИ

Линейная колебательная система с неконсервативными позиционными силами описывается уравнением

$$M\ddot{q} + Cq = 0, \quad C = P + N \quad (1)$$

где q — вектор обобщенных координат произвольной размерности, M — вещественная симметрическая положительно определенная матрица масс, вещественные матрицы $P = P^T$ и $N = -N^T$ описывают потенциальные и неконсервативные позиционные (циркуляционные) силы соответственно.

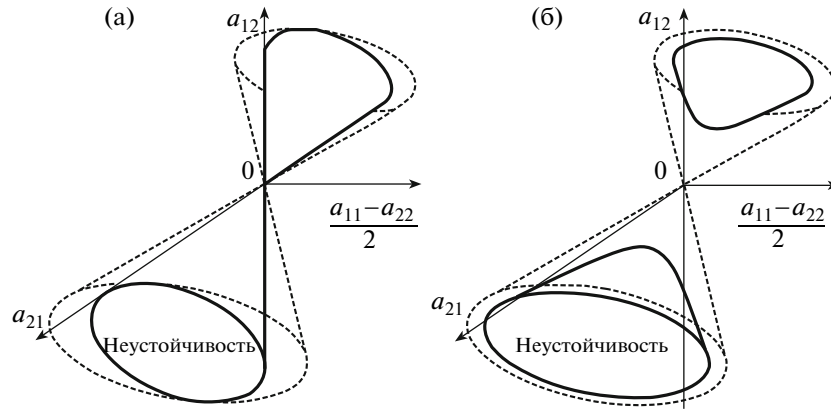


Рис. 1. Коническая особенность области устойчивости в случае возмущения системы с кратной частотой малыми неконсервативными силами: а – без демпфирования, б – с демпфированием. Штриховая коническая поверхность обозначает границу области устойчивости в случае бесконечно малого демпфирования.

Уравнение (1) имеет решения вида $\mathbf{q} = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$, где собственные значения λ и собственные векторы \mathbf{u} находятся из задачи на собственные значения

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mu \mathbf{M}\mathbf{u}, \quad \mu = -\lambda^2. \quad (2)$$

Очевидно, что наряду с λ величины $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также являются собственными значениями, что отражает свойство обратимости вещественной системы (1) по времени. Следовательно, система (1) устойчива, если все собственные значения λ чисто мнимые и простые или полупростые (число линейно независимых собственных векторов \mathbf{u} совпадает с алгебраической кратностью λ); см., например, [5]. Это условие устойчивости эквивалентно тому, что собственные значения μ в (2) вещественные, положительные и простые или полупростые. Отметим, что простые собственные значения λ не могут сойти с мнимой оси при малом возмущении матриц системы. В противном случае это означало бы появление также собственных значений $-\bar{\lambda}$, т.е. увеличение общего числа собственных значений. Поэтому граница области устойчивости характеризуется кратными нулевыми или кратными чисто мнимыми λ (нулевыми или кратными положительными μ).

В настоящей работе рассматривается случай, когда матрицы системы имеют вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{C}, \quad (3)$$

где $\delta\mathbf{M} = \delta\mathbf{M}^T$ и $\delta\mathbf{C} \neq \delta\mathbf{C}^T$ – малые возмущения матриц устойчивой консервативной системы $\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}_0 \dot{\mathbf{q}} = 0$ с положительно определенной матрицей $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^T > 0$. Если собственные значения консервативной системы $\lambda = i\omega$ простые, то малые возмущения матриц $\delta\mathbf{M}$ и $\delta\mathbf{C}$ приводят к сдвигу собственных значений λ по мнимой оси и система остается устойчивой. Поэтому с точки

зрения устойчивости представляет интерес случай кратной частоты ω .

Рассмотрим наиболее важный случай, когда консервативная система имеет двукратную частоту $\omega_0 > 0$. Отвечающие ей собственные векторы \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 определяются из уравнений и условий нормировки

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{u}_i = \mu_0 \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mu_0 = \omega_0^2, \quad (4)$$

$$i, j = 1, 2.$$

При возмущении (3) собственные значения μ и соответствующие собственные векторы \mathbf{u} находят в виде

$$\mu = \mu_0 + \delta\mu + \dots, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} + \dots, \quad (5)$$

где два значения поправки $\delta\mu$ и соответствующие коэффициенты α_1, α_2 определяются из уравнений (см. [5])

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \alpha_j = \delta\mu \alpha_i, \quad a_{ij} = \mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{C} \mathbf{u}_j - \omega_0^2 \mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{M} \mathbf{u}_j, \quad (6)$$

$$i, j = 1, 2.$$

Система устойчива, если поправка $\delta\mu$ принимает два различных вещественных значения, и неустойчива, когда $\delta\mu$ комплексные. Отсюда в первом приближении находим следующее условие неустойчивости:

$$\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12} a_{21} < 0. \quad (7)$$

Это неравенство определяет внутреннюю часть конуса в пространстве коэффициентов $a_{12}, a_{21}, \frac{a_{11} - a_{22}}{2}$ (см. рис. 1а). Возникновение конической особенности в трехмерном пространстве пара-

метров закономерно, так как двукратное вещественное полупростое собственное значение μ в (2) определяет особенность коразмерности 3 на бифуркационной диаграмме семейства несимметрических матриц [6].

Случай частоты ω_0 произвольной кратности r рассматривается аналогично. При этом индексы i, j в (4)–(6) изменяются от 1 до r . Интересным является случай, когда $\delta\mathbf{C} \equiv \delta\mathbf{N} = -\delta\mathbf{N}^T$, т.е. к консервативной системе с кратной частотой добавляются чисто циркуляционные силы. Тогда коэффициенты $a_{ij} = \mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{N}\mathbf{u}_j$ обладают свойством $a_{ij} = -a_{ji}$. Поскольку в этом случае матрица $i[a_{jk}]$ эрмитова, то все собственные значения матрицы $[a_{ij}]$ простые или полупростые и лежат на мнимой оси. Если хотя бы одно из них ненулевое, то система становится неустойчивой. Таким образом консервативная система с кратной частотой ω_0 дестабилизируется малыми циркуляционными силами $\delta\mathbf{N}\mathbf{q}$, если $\mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{N}\mathbf{u}_j \neq 0$ для некоторых собственных векторов, отвечающих ω_0 . Легко проверить на конкретных примерах, что если $\mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{N}\mathbf{u}_j = 0$ для всех собственных векторов, отвечающих ω_0 , то система может остаться устойчивой. Дестабилизация потенциальной системы циркуляционными силами в случае, когда кратность ω_0 совпадает с размерностью системы, доказана в [7].

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Исследуем влияние малых диссипативных сил, описываемых членом $\delta\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ с положительно определенной симметрической матрицей $\delta\mathbf{D}$, добавленным к левой части колебательной системы (1). Тогда задача на собственные значения (2) принимает вид

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \delta\mathbf{D} + \mathbf{C})\mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Хорошо известно, что добавление малых диссипативных сил к устойчивой консервативной системе приводит к изменению $\text{Re}\delta\lambda = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \delta\mathbf{D}\mathbf{u} < 0$ для каждого простого собственного значения $\lambda = i\omega$ с собственным вектором \mathbf{u} (см., например, [5]). В результате система становится асимптотически устойчивой. Это же утверждение верно и при наличии малых неконсервативных сил, когда все собственные значения λ чисто мнимые и простые (в силу малости неконсервативных сил возмущения $\text{Re}\delta\lambda$ определяются в первом приближении той же формулой). Таким образом, и при наличии демпфирования основной интерес для анализа устойчивости представляет случай кратной частоты.

В случае двукратной частоты ω_0 консервативной системы анализ устойчивости проводится

аналогично. При этом в уравнении (6), записанном в терминах $\delta\mu = \delta(-\lambda^2) = -2i\omega_0\delta\lambda$, появляется диссипативный член:

$$\sum_{j=1}^2 (2i\omega_0\delta\lambda\delta_{kj} + i\omega_0 d_{kj} + a_{kj})\alpha_j = 0, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

с коэффициентами демпфирования $d_{kj} = \mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{D}\mathbf{u}_j$. Условие асимптотической устойчивости требует $\text{Re}\delta\lambda < 0$ для обеих корней $\delta\lambda$ системы (9). Запишем характеристическое уравнение системы (9) в виде $\delta\lambda^2 + (D + iG)\delta\lambda + P + iN = 0$ и применим критерий устойчивости Бильхарца для полиномов с комплексными коэффициентами $D > 0$, $N^2 - GDN < D^2P$ (см., например, [5]). Первое условие $D = \frac{d_{11} + d_{22}}{2} > 0$ выполнено для положительной определенной матрицы демпфирования $\delta\mathbf{D}$. А второе неравенство, взятое с обратным знаком, дает условие неустойчивости в виде

$$\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} + \omega_0^2 d^2 (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2) < < \left(\xi_1 \frac{a_{11} - a_{22}}{2} + \xi_2 \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)^2, \quad (10)$$

$$d = \frac{d_{11} + d_{22}}{2}, \quad \xi_1 = \frac{d_{11} - d_{22}}{d_{11} + d_{22}}, \quad \xi_2 = \frac{2d_{12}}{d_{11} + d_{22}}. \quad (11)$$

Из неравенства $d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$, верного для положительной определенной матрицы $\delta\mathbf{D}$, следует условие $\xi_1^2 + \xi_2^2 < 1$. Таким образом, последний член в левой части (10) положительный. Условие неустойчивости (10) зависит от трех независимых величин d_{11} , d_{22} , $d_{12} = d_{21}$, a_{12} , a_{21} и $a_{11} - a_{22}$. Это согласуется с результатами теории особенностей, согласно которой двукратное полупростое комплексное собственное значение $\lambda = i\omega_0$ определяет особенность коразмерности 6 для семейств вещественных матриц общего вида [6].

При фиксированных d_{ij} неравенство (10) определяет двуполостной гиперboloид в пространстве $(a_{11} - a_{22}, a_{12}, a_{21})$, форма которого существенно зависит от отношений коэффициентов демпфирования ξ_1, ξ_2 (рис. 1б). В случае $\xi_1 = \xi_2 = 0$ условие неустойчивости (10) принимает вид

$$\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} + \omega_0^2 d^2 < 0, \quad (12)$$

$$d = d_{11} = d_{22}, \quad d_{12} = 0.$$

При $d \rightarrow 0$ это условие совпадает с условием неустойчивости (7) для системы без демпфирования. Наличие демпфирования $d > 0$ стабилизирует систему (уменьшает область неустойчивости).

Данный случай характерен для систем, где кратная частота ω_0 возникает в результате симметрии.

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi_1 \neq 0$ или $\xi_2 \neq 0$. При стремлении коэффициентов демпфирования d_{ij} к нулю с фиксированными отношениями ξ_1, ξ_2 предельная область неустойчивости получается из (10) при $d = 0$. Эта область шире области неустойчивости системы без демпфирования (7), так как правая часть в (10) положительна. Отсюда следует, что учет малого демпфирования приводит к конечному (скачкообразному) увеличению области неустойчивости, зависящему от значений ξ_1 и ξ_2 (рис. 1). При этом соответствующие границы (конусы) касаются лучей, лежащих в плоскости $\xi_1(a_{11} - a_{22}) + \xi_2(a_{12} + a_{21}) = 0$, в которой член в правой части (10) равен нулю. Этот феномен дестабилизации аналогичен скачкообразному увеличению зоны комбинационного резонанса при добавлении малого демпфирования (см. [5, 8]). Имеется также аналогия с парадоксом дестабилизации Циглера, когда критический параметр устойчивости циркуляционной системы уменьшается на конечную величину при учете сколь угодно малого демпфирования (см. [9, 4]).

Заметим, что В.В. Болотин [4] исследовал устойчивость системы с двумя степенями свободы и равными частотами при добавлении малых циркуляционных и диссипативных сил. Для сравнения с его результатами положим в (10) $a_{ij} = \beta b_{ij} \omega_0^2, a_{11} = a_{22} = 0, d_{11} = g_1, d_{22} = g_2, d_{12} = 0$ с параметром нагрузки β и получим условие неустойчивости $\beta^2 \omega_0^2 b_{12} b_{21} + g_1 g_2 < 0$. Это неравенство согласуется с формулой (1.100) в [4] для критического параметра нагрузки

$$\beta_{**} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{b_{12} b_{21}}} \sqrt{g_1 g_2} \quad (13)$$

за исключением частоты ω_0 , пропущенной в знаменателе.

ПАРАДОКС НИКОЛАИ

Рассмотрим прямой упругий стержень длины l , погонной массы m , постоянного поперечного сечения с главными моментами инерции J_x, J_y и с модулем упругости E . Стержень жестко зашпелен на одном конце и нагружен моментом L и осевой силой P на свободном конце. Следуя [4], будем рассматривать два вида момента: тангенциальный момент, направленный по касательной к оси стержня на конце (рис. 2), и аксиальный момент, параллельный оси z . В прямолинейном положении равновесия кручение стержня определяется углом $\theta(z) = \frac{Lz}{GI_d}$, где GI_d – крутильная жесткость.

Малые колебания стержня около данного положения равновесия описываются уравнением

$$(EJq'')'' + LNq''' + Pq'' + m\ddot{q} = 0 \quad (14)$$

для функции прогиба $q(z) = (q_x, q_y)^T$, определяющей отклонение оси стержня в направлении осей x и y . В уравнении (14) точками и штрихами обозначены производные по времени и по z соответственно. Упругие силы описываются первым членом $(EJq'')''$. Здесь матрица моментов инерции $J(z)$ отвечает скрученному положению равновесия, т.е. вычисляется для сечения стержня, повернутого на угол $\theta(z)$:

$$J = R \begin{pmatrix} J_y & 0 \\ 0 & J_x \end{pmatrix} R^T, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Второй член LNq''' с матрицей $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет обобщенную силу, отвечающую моменту L . В таком виде он был получен в [4] для осесимметричного стержня. Вид этого члена, однако, не зависит от формы сечения стержня, так как обобщенная сила определяется работой момента, приложенного к концу стержня. Оставшиеся два члена Pq'' и $m\ddot{q}$ отвечают осевой силе P и силе инерции соответственно. Граничные условия имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned} z = 0: q &= 0, \quad q' = 0; \\ z = 1: q'' &= 0, \quad (EJq'')' + Pq' = 0 \\ &(\text{тангенциальный момент}); \quad (16) \\ z = 1: EJq'' + LNq''' &= 0, \quad (EJq'')' + LNq'' + Pq' = 0 \\ &(\text{аксиальный момент}). \end{aligned}$$

Решения уравнений (14), (16) вида $q(s, t) = u(s) \exp(\lambda t)$ определяются из краевой задачи на собственные значения

$$(EJu'')'' + LNu''' + Pu'' = m\mu u, \quad \mu = -\lambda^2 \quad (17)$$

с теми же граничными условиями (16) для $u(s)$. Прямым вычислением легко показать, что задачи (17), (16), отвечающие тангенциальному и аксиальному моментам, являются сопряженными. Так как характеристические уравнения для сопряженных задач совпадают, задачи устойчивости для случаев тангенциального и аксиального моментов эквивалентны. Далее будем рассматривать случай тангенциального момента.

Запишем уравнение (14) с граничными условиями в безразмерном виде

$$\ddot{q} + (Jq'')'' + LNq''' + Pq'' = 0, \quad (18)$$

$$z = 0: q = q' = 0; \quad z = 1: q'' = (Jq'')' + Pq' = 0, \quad (19)$$

где введены безразмерные переменные и параметры

$$\tilde{z} = \frac{z}{l}, \quad \tilde{t} = t \sqrt{\frac{E(J_x + J_y)}{2m_0 l^4}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{l}, \quad \tilde{P} = \frac{2Pl^2}{E(J_x + J_y)},$$

$$\tilde{L} = \frac{2Ll}{E(J_x + J_y)}, \quad \chi = \frac{E(J_x + J_y)}{2GI_d}, \quad \sigma = \frac{J_y - J_x}{J_x + J_y}, \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{I} + \sigma \mathbf{K}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

с углом $\theta(\tilde{z}) = \chi \tilde{L} \tilde{z}$ и затем опущены тильды. Заметим, что величина $\chi \sim 1$. Уравнение (17) записывается в безразмерном виде

$$(\mathbf{J}\mathbf{u})'' + L\mathbf{N}\mathbf{u}''' + P\mathbf{u}'' = \mu\mathbf{u}. \quad (21)$$

Будем исследовать устойчивость системы в предположении малости момента $|L| \ll 1$ и асимметрии сечения стержня $|\sigma| \ll 1$.

Для стержня с равными главными моментами инерции сечения $\sigma = 0$ и в отсутствие тангенциального момента $L = 0$ все собственные значения $\lambda = i\omega$ в силу симметрии двукратные и полупростые. Соответствующие собственные формы определяются в виде

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} w(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w(z) \end{pmatrix},$$

$$\int_0^1 w^2 dz = 1, \quad (22)$$

где последнее соотношение есть условие нормировки. Функция $w(z)$ определяется краевой задачей

$$w'''' + Pw'' = \omega^2 w, \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad (23)$$

$$w''(1) = w'''(1) + Pw'(1) = 0.$$

Решения задачи (23) с учетом первых трех граничных условий имеют вид

$$w = c(r_1^2 \operatorname{ch} r_1 + r_2^2 \operatorname{cos} r_2)(r_1 \sin r_2 z - r_2 \operatorname{sh} r_1 z) +$$

$$+ cr_1 r_2 (r_1 \operatorname{sh} r_1 + r_2 \sin r_2)(\operatorname{ch} r_1 z - \operatorname{cos} r_2 z), \quad (24)$$

$$r_k = \sqrt{\frac{(-1)^k P + \sqrt{P^2 + 4\omega^2}}{2}}, \quad k = 1, 2,$$

где константа c определяется условием нормировки в (22). Частоты ω находятся из характеристического уравнения, определяемого подстановкой (24) в четвертое граничное условие в (23):

$$2\omega^2 + (P^2 + 2\omega^2) \operatorname{ch} r_1 \operatorname{cos} r_2 - P\omega \operatorname{sh} r_1 \sin r_2 = 0. \quad (25)$$

Критическая эйлера сила $P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2}{4}$ отвечает частоте $\omega = 0$; предполагается, что $P < P_{\text{cr}}$.

При малых значениях $|L| \ll 1$ и $|\sigma| \ll 1$ уравнение (21) содержит члены первого порядка малости $\sigma \mathbf{K}(0)\mathbf{q}''''$ и $L\mathbf{N}\mathbf{q}''''$ (пренебрегая членами второго порядка малости в матрице моментов инерции: $\theta = \chi Lz \rightarrow 0$). Вариация собственного значения μ определяется уравнением (6), где коэффициенты a_{ij} вычисляются аналогично путем подстановки (5) в (21), (16), умножения обеих сторон дифференциального уравнения слева на \mathbf{u}_i^T и интегрирования по z . В результате нескольких интегрирований по частям с использованием (22), (23) члены с $\delta\mathbf{u}$ пропадают, и находим

$$[a_{ij}] = \frac{w^2(1)}{2} \begin{pmatrix} b_\sigma \sigma & -L \\ L & -b_\sigma \sigma \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$b_\sigma = \frac{2}{w^2(1)} \int_0^1 w''^2 dz.$$

Тогда условие неустойчивости (7) для рассматриваемой моды колебаний записывается в виде

$$L^2 > b_\sigma^2 \sigma^2. \quad (27)$$

Коэффициент b_σ описывает влияние асимметричности ($\sigma \neq 0$), приводящей к возникновению критического значения момента $L_{\text{cr}} = |b_\sigma \sigma| > 0$. Из формулы (27) следует, что стержень с равными моментами инерции ($\sigma = 0$) теряет устойчивость при сколь угодно малом значении тангенциального момента L . Этот эффект известен как парадокс Николаи [1, 4]. Асимметричность сечения дает стабилизирующий эффект при любой осевой силе $P < P_{\text{cr}}$.

В качестве примера рассмотрим стержень эллиптического сечения, близкого к кругу радиуса R , с полуосями $R + \delta R$ и R . В этом случае $J_y = \frac{\pi(R + \delta R)^3 R}{4}$, $J_x = \frac{\pi(R + \delta R)R^3}{4}$, и в первом при-

ближении по δR параметр $\sigma = \frac{\delta R}{R}$. Для этого стержня при отсутствии продольной силы $P = 0$ формула для области неустойчивости (27) дает

$$L^2 > b_c^2 \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 \quad (28)$$

с коэффициентом $b_c = 3.26$. Для стержня этого же сечения в рамках дискретной модели с двумя степенями свободы согласно Николаи [2] получается формула (28) с меньшим коэффициентом $b_d = \frac{8}{3}$.

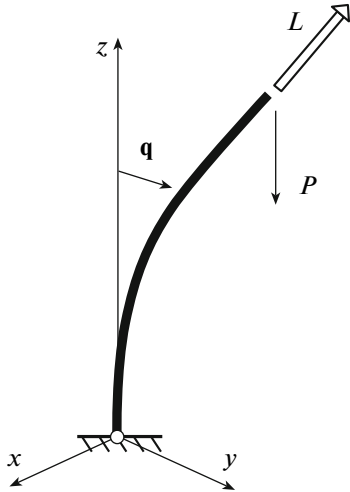


Рис. 2. Стержень, нагруженный осевой силой P и тангенциальным моментом L .

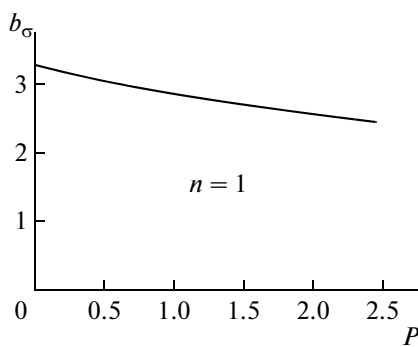
Таким образом, использование дискретной модели сужает область устойчивости.

Исследуем влияние на устойчивость малых диссипативных сил, описываемых дополнительными членами в уравнении (18) вида $\eta_e \dot{q}$ (внешнее трение) и $\eta_i \dot{q}'''$ (модель Кельвина–Фойгта внутреннего трения) с безразмерными положительными коэффициентами $\eta_e \ll 1$, $\eta_i \ll 1$. С учетом малости σ в члене, описывающем внутреннее трение, положено $\mathbf{J} = \mathbf{I}$. Граничное условие (19) на свободном конце принимает вид

$$z = 1: \mathbf{q}'' = 0, \quad (\mathbf{J}\mathbf{q}''')' + \eta_i \dot{\mathbf{q}}''' + P\mathbf{q}' = 0. \quad (29)$$

Коэффициенты диссипативных членов в (9) находятся в виде

$$d_{ij} = \eta \delta_{ij}, \quad \eta = \eta_e + \eta_i \int_0^1 w^{n^2} dz. \quad (30)$$



В первом приближении область неустойчивости определяется неравенством (12), записанном в виде

$$L^2 > b_\sigma^2 \sigma^2 + b_\eta^2 \eta^2, \quad b_\eta = \frac{2\omega}{w^2(1)}. \quad (31)$$

Демпфирование стабилизирует систему, поскольку здесь мы имеем дело со специальным случаем $\xi_1 = \xi_2 = 0$ согласно (11). Стабилизирующий эффект демпфирования и асимметричности сечения впервые был обнаружен Е.Л. Николаи [1–3] для модели безмассового упругого стержня с точечной массой на конце с двумя степенями свободы (см. также [4]). Соотношение (31) обобщает эти эффекты на случай распределенной массы, наличия осевой силы, внешнего и внутреннего демпфирования. Эта же формула определяет область неустойчивости для стержня, нагруженного аксиальным моментом, так как соответствующие задачи устойчивости эквивалентны.

Область неустойчивости стержня есть объединение областей неустойчивости (31), вычисленных для всех частот $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$, определяемых уравнением (25). Численные расчеты показывают, что для всех $P < P_{cr}$ коэффициент b_σ быстро растет с увеличением номера моды колебаний n . Поэтому влияние асимметричности сечения на устойчивость в отсутствие демпфирования определяется первой модой колебаний с частотой ω_1 . Коэффициент b_σ для первой моды убывает с увеличением осевой силы P . Зависимость b_σ от P изображена на рис. 3 слева. Коэффициент b_η зависит от P и номера моды колебаний n , причем зависимость от n немонотонная и имеет место предел $b_\eta \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$ (рис. 3 справа).

Так, например, при $P = \sigma = 0$ и наличии лишь внешнего демпфирования ($\eta_i = 0$) получим условие неустойчивости $|L| > b_\eta \eta_e$, где $b_\eta = 0.9278$ для первой моды колебаний, $b_\eta = 0.482$ для второй и

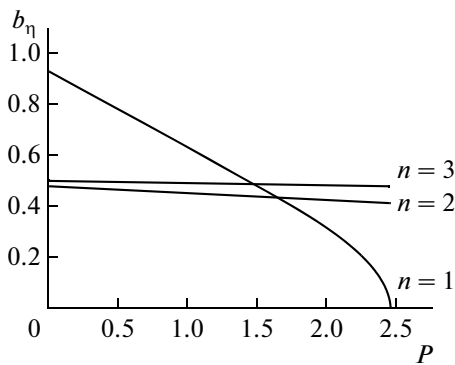


Рис. 3. Зависимости коэффициентов b_σ и b_η в условии неустойчивости (31) от безразмерной осевой силы P для различных мод колебаний n .

$b_{\eta} \approx 0.5$ для более высоких мод. В [4] из анализа первой моды было получено условие устойчивости стержня, нагруженного аксиальным моментом, в виде $|L| < 0.93\eta_e$ (в наших обозначениях). Ввиду эквивалентности задач устойчивости это неравенство справедливо и в случае тангенциального скручивающего момента. Однако корректное условие устойчивости определяется второй модой и имеет вид $|L| < 0.482\eta_e$.

Авторы искренне признательны П.Е. Товстику за его предложение исследовать парадокс Николаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаи Е.Л.* Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня // Изв. Ленинград. политехн. ин-та. 1928. Т. 31. С. 201–231.
2. *Николаи Е.Л.* К вопросу об устойчивости скрученного стержня // Вестн. прикл. математики и механики. 1929. Т. 1. С. 41–58.
3. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. 583 с.
4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
8. *Sevranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. New Jersey: World Sci., 2004. 420 p.
9. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. V. 20. P. 49–56.