



## **Introdução à Teoria de Vibrações e Ondas**

Alexei A. Mailybaev

[alexei@impa.br](mailto:alexei@impa.br)

**Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA**

---

O curso oferece introdução à Teoria de Vibrações e Ondas: a teoria matemática e física, incluindo a explicação dos vários efeitos. Direcionando-se aos alunos que desejam dar continuidade aos estudos e pesquisas na área de matemática aplicada, computacional e modelagem.

**Ementa:**

Equações do Movimento: princípio variacional, simetrias, leis de conservação.

Oscilações: autovalores, estabilidade, ressonâncias.

Ondas Lineares: equações discretas e contínuas, o método espectral.

Ondas Não-lineares: modelos matemáticos, soluções básicas, aplicações.

As notas foram digitadas pelo aluno Marlon M. López F. baseado no curso, ano 2013.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Mecânica Clássica</b>	<b>5</b>
1.1	Princípio de Mínima Ação de Hamilton . . . . .	5
1.2	Equações de Euler–Lagrange . . . . .	6
1.3	Observações sobre Ação e Lagrangiana . . . . .	9
1.4	Grupo Galileu . . . . .	11
1.5	- Lagrangiana de um Ponto Material . . . . .	14
1.6	Leis de Newton . . . . .	17
1.7	Lagrangiana de um Sistema de Partículas . . . . .	20
1.8	Centro de Massa . . . . .	22
1.9	Interação Gravitacional . . . . .	23
1.10	Simetrias . . . . .	30
1.11	Teorema de Noether . . . . .	32
1.12	Momento Linear . . . . .	34
1.13	Momento Angular . . . . .	36
1.14	Generalização do Teorema de Noether . . . . .	38
1.15	Conservação de Energia . . . . .	40
1.16	Problema de Kepler . . . . .	41
1.17	Forças e Trabalho . . . . .	47
1.18	Forças Dissipativas . . . . .	50

1.19	Mecânica Hamiltoniana . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Oscilações</b>	<b>57</b>
2.1	Sistema com 1 Grau de Liberdade . . . . .	57
2.2	Posição de Equilíbrio . . . . .	58
2.3	Movimento em uma Vizinhança da Posição de Equilíbrio . . . . .	59
2.4	Separatriz . . . . .	65
2.5	Movimento com Dissipação . . . . .	66
2.6	Equação Linearizada Perto de Equilíbrio Estável . . . . .	67
2.7	Oscilações de Sistema com $n$ Graus de Liberdade . . . . .	72
2.8	Posição de Equilíbrio . . . . .	73
2.9	Estabilidade . . . . .	73
2.10	Pequenas Oscilações . . . . .	74
2.11	Sistemas com Forças Potenciais . . . . .	80
2.12	Sistemas com Forças Não Conservativas . . . . .	81
2.13	Cadeia de Jordan . . . . .	85
2.14	Forma Canônica de de Jordan . . . . .	86
2.15	Teoria de Estabilidade . . . . .	88
2.16	Estabilidade de Sistemas com Pequenas Oscilações . . . . .	90
2.17	Estabilização Giroscópica: Caso especial de Lyapunov . . . . .	95
2.18	Flutter . . . . .	95
2.19	Sistema Não Autônomos . . . . .	100
2.20	Resonância . . . . .	102
2.21	Sistema com Dissipação . . . . .	103
2.22	Teoria de Estabilidade para Sistemas Periódicos $\frac{dx}{dt} = G(t)x$ . . . . .	106
2.23	Ressonância Paramétrica (Pêndulo) . . . . .	106
2.24	(Cont.) Ressonância Paramétrica (Pêndulo) . . . . .	106
2.25	Medianização . . . . .	106
<b>3</b>	<b>Ondas</b>	<b>107</b>
3.1	Sistema Infinito de Massas e Molas . . . . .	108

---

3.2	Série de Fourier . . . . .	108
3.3	Transição para a Equação de Onda (Sistema de Massas e Molas) . . . . .	108
3.4	Equação da Onda (Solução Geral) . . . . .	108
3.5	Meio Contínuo. Derivação da Equação da Onda para Ondas Longas . . . . .	108
3.6	(Cont.) Meio Contínuo. Derivação da Equação da Onda para Ondas Longas . . . . .	108
3.7	Oscilações de Corda (Método Espectral) . . . . .	108
3.8	Oscilações de Corda com Dissipação . . . . .	108
3.9	Lista # 5 . . . . .	108
3.10	Oscilações de Corda Forçadas, Ressonância . . . . .	108
3.11	Ondas de Faraday . . . . .	108
3.12	Ondas Esféricas . . . . .	108
3.13	Dispersão. Velocidade de Grupo . . . . .	108
3.14	Rastro de Navio (Kelvin Wake) . . . . .	108
3.15	Equação de KdV. Soliton . . . . .	108
	<b>Referências</b>	<b>109</b>

---

---

# 1

---

## MECÂNICA CLÁSSICA

### 1.1 Princípio de Mínima Ação de Hamilton

A Mecânica Clássica estuda o comportamento dos sistemas físicos no espaço tridimensional  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  e tempo  $t \in \mathbb{R}$ . Qualquer objeto muito pequeno, tão pequeno que a dimensão dele não tem efeito sobre a dinâmica, é considerado como um *ponto material*. Objetos maiores são considerados conjuntos de pontos materiais. Cada ponto material tem coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e um sistema de pontos materiais, indexados pelas letras  $a, b, \dots$ , em cada momento do tempo está representado pelo vetor

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x_{1a} \\ x_{2a} \\ x_{3a} \\ x_{1b} \\ x_{2b} \\ x_{3b} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.1)$$

O movimento do sistema (trajetória física) é uma função  $\mathbf{q}(t)$ . Desde agora, assumiremos que todas as funções neste curso são diferenciáveis (tantas vezes quanto necessário), se não for afirmado o contrário.

A forma mais abstrata de começar com o estudo da mecânica clássica é pelo *Princípio de Mínima Ação de Hamilton*. A ação que corresponde à trajetória  $\mathbf{q}(t)$  no intervalo de tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$  está definida como

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt, \quad (1.1.2)$$

onde  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se chama *função de Lagrange* (Lagrangiana) e o ponto significa diferenciação no tempo, *i.e.*,  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$  é o vetor de velocidades. O Princípio afirma que a ação atinge o mínimo local

$$\mathcal{S} \rightarrow \min \quad (1.1.3)$$

na trajetória física  $\mathbf{q}(t)$  dentro de todas as trajetórias com os mesmos pontos finais

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1. \quad (1.1.4)$$

## 1.2 Equações de Euler–Lagrange

Vamos começar com o caso mais simples quando  $q \in \mathbb{R}$  (um ponto na reta). Seja  $q(t)$  a trajetória física. Consideraremos a variação  $q(t) + \varepsilon h(t)$ , onde  $|\varepsilon| \ll 1$  é um parâmetro pequeno e a função  $h(t)$  satisfaz as condições

$$h(t_0) = h(t_1) = 0. \quad (1.2.1)$$

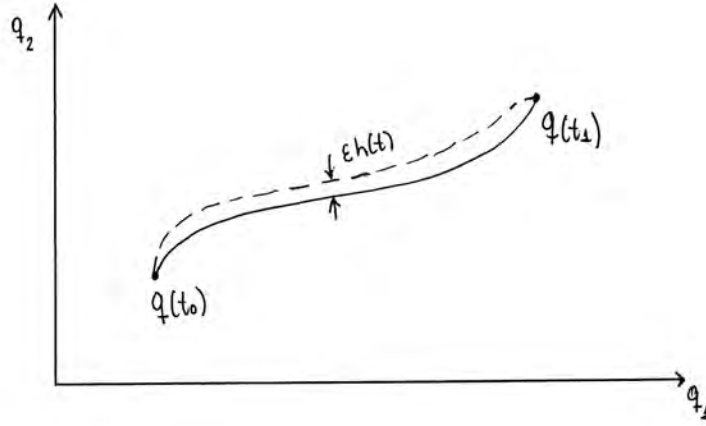


Figura 1.1: A trajetória  $q(t)$  com uma pequena perturbação  $\varepsilon h(t)$ .

Como  $q(t) + \varepsilon h(t) = q(t)$  nos pontos finais  $t = t_0$  e  $t_1$ , pelo Princípio de Mínima Ação (1.1.3) temos

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) dt. \quad (1.2.2)$$

Para  $\varepsilon$  pequeno usamos a expansão de Taylor

$$\mathcal{L}(t, q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}) = \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) + o(\varepsilon). \quad (1.2.3)$$

Substituindo esta expressão em (1.2.2) obtemos

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt + o(\varepsilon) \geq 0. \quad (1.2.4)$$

Para esta desigualdade ser válida para todo  $\varepsilon$  pequeno (positivo ou negativo), é necessário que

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt = 0. \quad (1.2.5)$$

O próximo passo é integrar o segundo termo por partes usando (1.2.1)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{dh}{dt} dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) h dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) h dt. \quad (1.2.6)$$



Substituindo esta expressão em (1.2.5) obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] h dt = 0. \quad (1.2.7)$$

A condição em (1.2.5) deve ser válida para qualquer  $h(t)$  com pontos fixos dados em (1.2.1). Como  $h(t)$  pode ter valores positivos e negativos é necessário que a expressão integral seja zero para todos os tempos, *i.e.*,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (1.2.8)$$

Esta expressão é chamada de *equação de Euler–Lagrange*.

Para o caso geral  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$  a função de Lagrange está dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n). \quad (1.2.9)$$

Nesse caso consideremos a variação de um coordenada  $q_i(t) + \varepsilon h(t)$  e  $\dot{q}_i(t) + \varepsilon \dot{h}(t)$  com as outras coordenadas fixas. Logo, refazendo o mesmo procedimento desenvolvido para obter (1.2.8) chegamos às equações de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.10)$$

Notemos que nessas equações  $\partial/\partial q_i$  e  $\partial/\partial \dot{q}_i$  são derivadas parciais da função  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , e  $d/dt$  denota a derivada total pelo tempo ao longo da trajetória  $\mathbf{q}(t)$ .

Observamos que a função de Lagrange para um sistema físico não é única. Seja

$$\tilde{\mathcal{L}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{q}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (1.2.11)$$

onde  $f$  é uma função qualquer que somente depende do tempo e das coor-

denadas. Então a ação correspondente será

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}} &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{q}) dt \\ &= \mathcal{S} + f(t_1, \mathbf{q}(t_1)) - f(t_0, \mathbf{q}(t_0)),\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

onde  $f(t_0, \mathbf{q}(t_0))$  e  $f(t_1, \mathbf{q}(t_1))$  são calculados nos pontos finais. Estes são valores fixos pelo Princípio de Mínima Ação. Isso implica que  $\tilde{\mathcal{S}}$  e  $\mathcal{S}$  atingem o mínimo na mesma trajetória  $\mathbf{q}(t)$  e conseqüentemente que as equações de Euler–Lagrange para  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e  $\tilde{\mathcal{L}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  são idênticas. O leitor pode verificar isso explicitamente pela substituição de  $\tilde{\mathcal{L}}$  nas equações (1.2.10).

### 1.3 Observações sobre Ação e Lagrangiana

Nesta seção mostraremos uma derivação intuitiva baseada num conjunto de hipóteses naturais levando aos conceitos de *ação* e *Lagrangiana*.

Seja  $\mathcal{S}[\mathbf{q}(t)]$  um funcional que determina um número real para toda trajetória  $\mathbf{q}(t)$ . Assumiremos que o funcional  $\mathcal{S}[\mathbf{q}(t)]$ , chamado de *ação*, atinge mínimo na trajetória física (o mínimo num sentido especificado mais adiante). Essa hipótese não é restritiva, porque sempre é possível escolher o funcional atingindo o mínimo para qualquer trajetória dada.

O próximo passo será determinado assumindo que a ação esteja definida e atinge o mínimo

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}(t) : t_0 \leq t \leq t_1] \rightarrow \min\tag{1.3.1}$$

na trajetória física  $\mathbf{q}(t)$  em qualquer intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Isto significa que a dinâmica no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  não depende do passado  $t < t_0$  nem do futuro  $t > t_1$ .

No intervalo de tempo pequeno  $\Delta t = t - t_0$  podemos usar a expansão

de Taylor:

$$\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{q}(t_0) + \dot{\mathbf{q}}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}(\Delta t)^2 + \dots \quad (1.3.2)$$

Assim, a trajetória está dada localmente pelo ponto inicial e suas derivadas em  $t = t_0$ . Então é natural assumir que existe a função

$$\mathcal{L}(t_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \dots) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}[\mathbf{q}(t) : t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t]}{\Delta t}. \quad (1.3.3)$$

Quebrando o intervalo em partes menores,  $t_0 = t_{(0)} < t_{(1)} < \dots < t_{(k)} = t_1$ , definimos

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}(t) : t_0 \leq t \leq t_1] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{S}[\mathbf{q}(t) : t_{(i)} \leq t \leq t_{(i+1)}] \quad (1.3.4)$$

que atinge o mínimo junto com todas as componentes da soma.

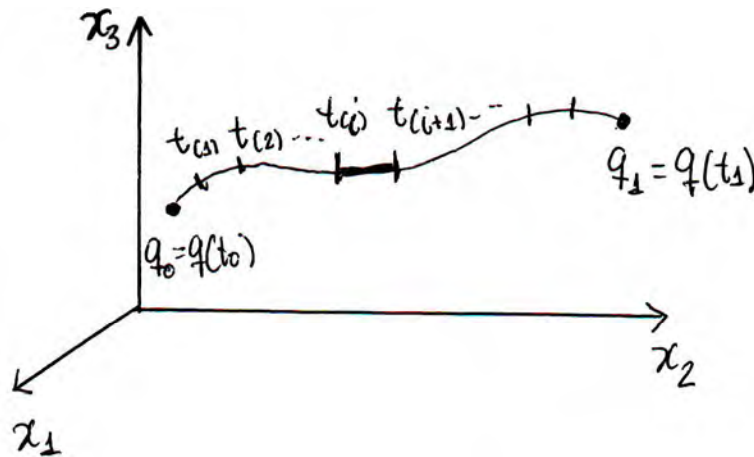


Figura 1.2: Trajetória como conjunto de intervalos pequenos.

No limite (1.3.3) a soma se reduz à integral

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}(t) : t_0 \leq t \leq t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \dots) dt. \quad (1.3.5)$$

Logo, tentaremos simplificar a teoria assumindo que a função  $\mathcal{L}$  somente depende de  $t$ ,  $\mathbf{q}$  e algum número finito das suas derivadas. A mecânica

clássica corresponde a escolha de  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que depende só das primeiras derivadas (velocidades). Essa função é chamada de *Lagrangiana*. É fácil verificar que a versão mais simples  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{q})$  não levará para uma teoria construtiva. Da expressão anterior chegamos à ação (1.1.2).

Finalmente, notaremos que a necessidade das condições de pontos fixos em (1.1.4) para a variação da trajetória (Figura 1.1) segue do termo  $\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} h \right|_{t_0}^{t_1}$  na derivação em (1.2.6). O leitor pode verificar que a condição de mínimo da ação em (1.2.5) no caso  $h(t_0) \neq 0$  implica que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$  para  $t = t_0$ , e como  $t_0$  é um ponto arbitrário temos  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$  para todos os tempos  $t$ . Nesse caso a Lagrangiana não depende da velocidade e, como já notaremos, não leva a uma teoria construtiva.

## 1.4 Grupo Galileu

Para achar a função Lagrangiana  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  usaremos as simetrias do espaço e o tempo, que na mecânica clássica estão dadas pelo grupo galileu. Os três elementos seguintes formam a estrutura galileana:

1. *Deslocamento*: O deslocamento da origem no tempo e no espaço tem a forma

$$t = t' + t_0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0 \quad (1.4.1)$$

onde  $t_0$  e  $\mathbf{x}_0$  são pontos fixos.

2. *Rotação*: A rotação sobre a origem no espaço pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (1.4.2)$$

onde  $\mathbf{G}$  é uma matriz  $3 \times 3$  e  $\mathbf{x}'$  é o vetor de coordenadas no novo referencial. Em uma rotação temos

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{G}\mathbf{x}', \mathbf{G}\mathbf{x}') = (\mathbf{G}\mathbf{x}')^T \mathbf{G}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{x}'. \quad (1.4.3)$$

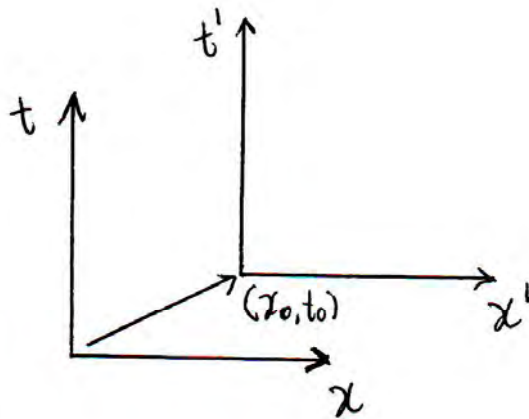


Figura 1.3: Deslocamento.

Aqui  $\mathbf{x}'^T$  é o vetor transposto (vetor linha),  $\|\mathbf{x}\|$  e  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  denotam a norma e o produto escalar, respectivamente. A rotação não muda a distância, *i.e.*,  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}'\|$ . Isso significa que  $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}$  é a matriz identidade. A matriz  $\mathbf{G}$  com essa característica chama-se de *matriz ortogonal*. Note que (1.4.3) com uma matriz ortogonal inclui todas as rotações sobre a origem e as reflexões sobre os planos passando pela origem.

3. *Movimento uniforme com velocidade constante  $\mathbf{u}$* : Para esse caso temos a transformação Galileana

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{u}t, \quad t = t'. \quad (1.4.4)$$

Essa transformação significa que o movimento uniforme do novo referencial tem velocidade  $\mathbf{u}$ .

A combinação desses três geram o *grupo galileu*.

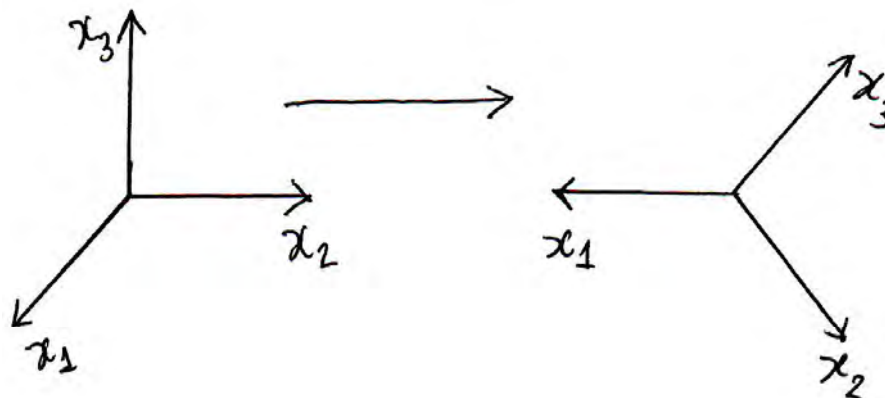


Figura 1.4: Rotação.

**Definição.** O grupo galileu  $\mathcal{G}$  é o grupo de transformações do espaço-tempo que têm a forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{G}\mathbf{x}' + \mathbf{u}t', \quad t = t_0 + t'. \quad (1.4.5)$$

Um elemento do grupo pode ser representado pelos parâmetros

$$a = (t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{G}, \mathbf{u}) \in \mathcal{G}$$

onde  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{G}$  é uma matriz ortogonal.

É fácil ver que a aplicação de duas transformações, primeiro  $a \in \mathcal{G}$  e depois  $b \in \mathcal{G}$ , definem a transformação do mesmo grupo referido como  $b*a \in \mathcal{G}$ . O leitor pode verificar que  $\mathcal{G}$  possui a seguinte estrutura de grupo.

**Definição.** Um conjunto  $\mathcal{G}$  com operação binária  $*$ , tal que  $\forall a, b \in \mathcal{G}$  se satisfaz  $a * b \in \mathcal{G}$ , é chamado de grupo se as três propriedades são satisfeitas:

- a) *Associatividade:*  $\forall a, b, c \in \mathcal{G}$  se satisfaz  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .

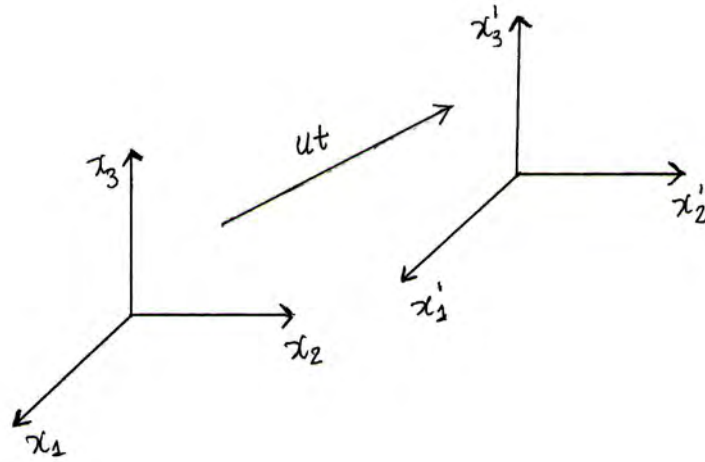


Figura 1.5: Movimento uniforme.

- b) *Existência de elemento neutro*:  $\exists e \in \mathcal{G}$ , tal que  $e * a = a * e = a \forall a \in \mathcal{G}$ .
- c) *Existência de elemento simétrico*:  $\forall a \in \mathcal{G} \exists a^{-1} \in \mathcal{G}$ , tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

O grupo galileu não é comutativo, *i.e.*,  $a * b \neq b * a$  para todos os elementos.

## 1.5 - Lagrangiana de um Ponto Material

A mecânica clássica está baseada no princípio que todas as leis de movimento são simétricas sob a ação do grupo galileu. Isto significa que transformações de coordenadas dadas pelos elementos de  $\mathcal{G}$  não mudam as leis de movimento. Qualquer referencial definido pela transformação do grupo galileu se chama de *referencial inercial* (ou referencial galileano).

O conceito de simetria é fundamental na física. Geralmente, o grupo de simetrias define a forma da Lagrangiana de partículas e também a forma de interação dentro delas. A mecânica clássica é uma teoria aproximada, válida somente quando as velocidades são pequenas em relação à velocidade da luz. Nesse sentido o grupo galileu é uma aproximação do grupo de Poincaré que define a Lagrangiana na Teoria da Relatividade Especial (Exercícios # 2).

Agora usaremos o conceito de simetria para achar a Lagrangiana de um ponto material, isto é a função

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad (1.5.1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  define a posição deste ponto. Analisaremos os elementos básicos do grupo.

1. O deslocamento está dado por  $t = t' + t_0$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0$ , onde  $t_0$  e  $\mathbf{x}_0$  são constantes. Logo escrevemos

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}(t' + t_0, \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}'). \quad (1.5.2)$$

Devemos observar que essa transformação não muda as leis da física, pois a Lagrangiana (e assim a ação) não muda e é igual à  $\mathcal{L}(t', \mathbf{x}', \dot{\mathbf{x}}')$ . Isso implica que a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}) \quad (1.5.3)$$

depende somente da velocidade. Essa propriedade implica *homogeneidade* do espaço e do tempo, *i.e.*, o fato que as leis físicas são as mesmas em todos os pontos do espaço e do tempo.

2. A rotação no espaço implica *isotropia*, *i.e.*, a hipótese que as leis físicas não dependem da direção no espaço. Para satisfazer essa condição a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2) \quad (1.5.4)$$

só pode ser a função da velocidade,  $v = \|\dot{\mathbf{x}}\|$ , mas não depende da direção  $\dot{\mathbf{x}}/v$  que mude sobre a rotação. Escrevemos  $v^2$  em (1.5.4) porque  $\mathcal{L}$  deve ser uma função suave de variáveis  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ , quando  $v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$ , tanto que  $v^3, v^5$ , etc. possuem singularidades em  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ .

3. Seja  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \varepsilon \mathbf{u}t$  o movimento uniforme, o que implica  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}' + \varepsilon \mathbf{u}$ .



Assumiremos que  $0 < \varepsilon \ll 1$  (velocidade pequena). Para ver qual será a forma de  $\mathcal{L}$  em (1.5.4) usaremos a expansão de Taylor

$$\mathcal{L} = a_0 + a_2 v^2 + a_4 v^4 + \dots \quad (1.5.5)$$

Vemos que

$$\begin{aligned} v^2 &= \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \|\dot{\mathbf{x}}' + \varepsilon \mathbf{u}\|^2 = (\dot{\mathbf{x}}' + \varepsilon \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}' + \varepsilon \mathbf{u}) \\ &= (\dot{\mathbf{x}}', \dot{\mathbf{x}}') + 2\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u}) + o(\varepsilon) \\ &= (v')^2 + 2\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u}) + o(\varepsilon), \\ v^4 &= (v^2)^2 = (v')^4 + 4\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u})(v')^2 + o(\varepsilon), \\ v^6 &= (v')^6 + 6\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u})(v')^4 + o(\varepsilon), \dots \end{aligned}$$

Logo substituímos em (1.5.5) e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= a_0 + a_2 v^2 + a_4 v^4 + a_6 v^6 \dots \\ &= a_0 + a_2 [(v')^2 + 2\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u})] + a_4 [(v')^4 + 4\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u})(v')^2] \\ &\quad + a_6 [(v')^6 + 6\varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u})(v')^4] + \dots + o(\varepsilon) \\ &= a_0 + a_2 (v')^2 + a_4 (v')^4 + a_6 (v')^6 + \dots \\ &\quad + \varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u}) [2a_2 + 4a_4 (v')^2 + 6a_6 (v')^4 + \dots] + o(\varepsilon) \\ &= \mathcal{L}(v') + \varepsilon (\dot{\mathbf{x}}', \mathbf{u}) [2a_2 + 4a_4 (v')^2 + 6a_6 (v')^4 + \dots] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Da observação após (1.2.11) sabemos que para não mudar as equações de movimento, o segundo termo na última linha de (1.5.6) deve ser da forma

$$\frac{d}{dt} f(t, q) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i. \quad (1.5.7)$$

Isto implica que nesse segundo termo somente devemos ter velocidades  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  na forma linear, *i.e.*,  $a_4 = a_6 = \dots = 0$ . Como o termo

constante  $a_0$  em (1.5.5) não entra nas equações de movimento, logo podemos escrever

$$\mathcal{L} = a_2 v^2. \quad (1.5.8)$$

Essa é a única forma da função de Lagrange para uma partícula isolada (um ponto material) que satisfaz todas as condições de simetria do grupo galileu. Como  $a_2$  é uma constante qualquer podemos escrever

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad (1.5.9)$$

onde chamaremos  $m$  de massa da partícula. A massa não pode ser negativa. Isto é necessário, pois a ação deve atingir o mínimo na trajetória. Como  $\mathcal{S} = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} v^2 dt$ , a ação só pode atingir mínimo se  $m \geq 0$ .

## 1.6 Leis de Newton

Para um ponto material, substituímos a função (1.5.9) nas equações de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.6.1)$$

e obtemos

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = m\ddot{x}_i = 0. \quad (1.6.2)$$

Então  $m\ddot{\mathbf{x}} = 0$ . Isso implica que  $\mathbf{x}$  é da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}t \quad (1.6.3)$$

com vetores constantes  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Vemos que esta é a *Primeira Lei de Newton*: um objeto que está em movimento (ou repouso) não mudará a sua velocidade a não ser que uma força aja sobre ele. Agora veremos como as forças aparecem em sistemas de dois ou mais pontos materiais.

Consideremos dois pontos materiais com coordenadas

$$\mathbf{x}_a = (x_{1a}, x_{2a}, x_{3a}), \quad \mathbf{x}_b = (x_{1b}, x_{2b}, x_{3b}). \quad (1.6.4)$$

Se os pontos estão muito distantes um do outro podemos assumir que não existe interação entre eles e que cada um pode ser considerado como um sistema isolado. Para cada ponto temos uma função Lagrangiana do tipo  $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}$  com massas  $m_a$  e  $m_b$ . Podemos definir a Lagrangiana do sistema de dois pontos (sem interação) na forma de soma

$$\mathcal{T} = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_b v_b^2}{2}. \quad (1.6.5)$$

A expressão acima é chamada de *energia cinética* e denota-se com a letra  $\mathcal{T}$ . Nesse caso o Princípio de Mínima Ação  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b \rightarrow \min$  implica o mínimo da ação de cada ponto material  $\mathcal{S}_{a,b} \rightarrow \min$ . Então, cada ponto faz um movimento uniforme do tipo (1.6.3).

Na Mecânica Clássica assumimos que a interação entre os pontos está determinada por uma função  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)$  que depende somente das coordenadas e não depende das velocidades. Essa função é chamada de *energia potencial*. Por convenção a Lagrangiana está dada pela diferença  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ . Assumindo a simetria do grupo galileu, podemos ver que a energia potencial de um sistema isolado de dois pontos somente depende da distância  $r = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|$  entre os pontos, o que não muda sobre deslocamentos, rotações e transformações de Galileu. Então, temos a Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{m_a}{2} (\dot{x}_{1a}^2 + \dot{x}_{2a}^2 + \dot{x}_{3a}^2) + \frac{m_b}{2} (\dot{x}_{1b}^2 + \dot{x}_{2b}^2 + \dot{x}_{3b}^2) - \mathcal{U}(r). \quad (1.6.6)$$

As equações de movimento para o primeiro ponto são

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{ia}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{ia}} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6.7)$$

Substituindo a Lagrangiana (1.6.6) em (1.6.7) obtemos

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_{ia}) - \left(-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{ia}}\right) = m\ddot{x}_{ia} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{ia}} = 0. \quad (1.6.8)$$

A equação anterior pode ser escrito como

$$m\ddot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a, \quad (1.6.9)$$

onde

$$\mathbf{F}_a = (F_{1a}, F_{2a}, F_{3a}) = \left(-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{1a}}, -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{2a}}, -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{3a}}\right) \quad (1.6.10)$$

é chamada de força que age sobre ponto  $a$ . Esta é a *Segunda Lei de Newton*: a força resultante em uma partícula é igual a taxa temporal da variação do seu momento linear  $\mathbf{P}_a = m\dot{\mathbf{x}}_a$ .

Repetindo o mesmo processo para o ponto  $b$  obtemos

$$m\ddot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{F}_b, \quad (1.6.11)$$

onde

$$\mathbf{F}_b = (F_{1b}, F_{2b}, F_{3b}) = \left(-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{1b}}, -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{2b}}, -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{3b}}\right) \quad (1.6.12)$$

é a força que age sobre ponto  $b$ . Lembrando que  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(r)$ , onde

$$r = \sqrt{(x_{1a} - x_{1b})^2 + (x_{2a} - x_{2b})^2 + (x_{3a} - x_{3b})^2}, \quad (1.6.13)$$

calculamos para  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} F_{ia} &= -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_{ia}} = -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_{ia}} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r} \frac{x_{ia} - x_{ib}}{\sqrt{(x_{1a} - x_{1b})^2 + (x_{2a} - x_{2b})^2 + (x_{3a} - x_{3b})^2}} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial r} \frac{x_{ia} - x_{ib}}{r}. \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Similarmente,

$$F_{ib} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{ib}} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \frac{x_{ib} - x_{ia}}{r} = -F_{ia}. \quad (1.6.15)$$

Esta é a *Terceira Lei de Newton*: se um corpo  $a$  exerce uma força em um corpo  $b$ , o corpo  $b$  simultaneamente exerce uma força sobre o corpo  $a$  possuindo a mesma magnitude e direção no sentido contrário, *i.e.*,  $\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_b$ .

## 1.7 Lagrangiana de um Sistema de Partículas

Generalizando a Lagrangiana em (1.6.6) para um sistema isolado com qualquer número de partículas leva à

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \dots, \dot{\mathbf{x}}_a, \dot{\mathbf{x}}_b, \dots) = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (1.7.1)$$

com a energia cinética

$$\mathcal{T} = \sum_{\alpha=a,b,\dots} \frac{m_\alpha}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_\alpha\|^2, \quad (1.7.2)$$

e a energia potencial  $\mathcal{U}$  que depende só das distâncias  $\|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta\|$  entre as partículas  $\alpha, \beta = a, b, \dots$ . A trajetória física está determinada pelo mínimo da ação e, conseqüentemente, pelas equações de Euler–Lagrange.

Na maioria dos estudos, é conveniente usar variáveis diferentes das coordenadas cartesianas dos pontos, por exemplo, coordenadas esféricas, posição do centro de massa, etc. Supomos que

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a(\mathbf{q}), \quad \mathbf{x}_b = \mathbf{x}_b(\mathbf{q}), \dots, \quad (1.7.3)$$

onde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de *coordenadas generalizadas*. Isso significa que  $\mathbf{q}$  define de forma única as posições de todos os pontos. Para as velocidades

temos

$$\dot{\mathbf{x}}_{\alpha}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \alpha = a, b, \dots \quad (1.7.4)$$

Seja a nova Lagrangiana definida como

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}), \mathbf{x}_b(\mathbf{q}), \dots, \dot{\mathbf{x}}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{x}}_b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dots). \quad (1.7.5)$$

Isso implica que

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{q}), \quad (1.7.6)$$

onde usando (1.7.4) temos

$$\tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{\alpha=a,b,\dots} \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{\mathbf{x}}_{\alpha}, \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1.7.7)$$

$$m_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_{\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_j} \right); \quad (1.7.8)$$

$$\tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) = \mathcal{U}(\|\mathbf{x}_{\alpha}(\mathbf{q}) - \mathbf{x}_{\beta}(\mathbf{q})\|). \quad (1.7.9)$$

Podemos escrever a nova ação

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}} dt \rightarrow \min. \quad (1.7.10)$$

Como as duas Lagrangianas  $\mathcal{L}$  e  $\tilde{\mathcal{L}}$  e as duas ações  $\mathcal{S}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$  são iguais, elas atingem o mesmo mínimo nas trajetórias dadas por  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{x}_{\alpha}(\mathbf{q}(t))$ . Então, a Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$  define as mesmas leis de movimento, mas agora para coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . Particularmente, a trajetória  $\mathbf{q}(t)$  nas novas coordenadas satisfaz as equações de Euler–Lagrange com a nova Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

## 1.8 Centro de Massa

Determinamos o *centro de massa* e a velocidade do centro de massa do conjunto de partículas como

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}. \quad (1.8.1)$$

As coordenadas de todas as partículas estão dadas por  $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_{\alpha}$ , onde  $\mathbf{r}'_{\alpha}$  é a posição relativa. Para as velocidades temos  $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}$  com velocidade de centro de massa  $V = \|\dot{\mathbf{R}}\|$  e velocidades relativas  $v'_{\alpha} = \|\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}\|$ . Logo podemos escrever a energia cinética como

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}, \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{V^2}{2} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}'^2}{2} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{V^2}{2} + \left( \dot{\mathbf{R}}, \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}'^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Para o segundo termo em (1.8.2) podemos usar (1.8.1) como

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{R}}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{R}} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Daí escrevemos a energia cinética em (1.8.2) na forma

$$\mathcal{T} = M \frac{V^2}{2} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{v_{\alpha}'^2}{2}, \quad (1.8.4)$$

onde  $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$  é a massa total do sistema. Então, a energia cinética é a soma da energia cinética do centro de massa e a energia cinética do

movimento relativo.

## 1.9 Interação Gravitacional

A interação gravitacional entre as partículas  $a$  e  $b$  está dada por uma forma específica da energia potencial

$$\mathcal{U} = -\frac{k}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|, \quad (1.9.1)$$

onde  $k = Gm_a m_b$  e  $G$  é a constante de gravitação universal,  $G = 6,674287 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ . Usaremos as coordenadas generalizadas: o centro de massa  $\mathbf{R}$  e a posição relativa  $\mathbf{x}$  dadas por

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{x}_a + m_b \mathbf{x}_b}{m_a + m_b}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b. \quad (1.9.2)$$

Nas novas coordenadas temos

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{R} + \frac{m_b}{m_a + m_b} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_b = \mathbf{R} - \frac{m_a}{m_a + m_b} \mathbf{x}, \quad (1.9.3)$$

e também

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_b}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}}_b = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_a}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.9.4)$$

Para a energia cinética obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{m_a}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_a\|^2 + \frac{m_b}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_b\|^2 \\ &= \frac{m_a}{2} \left( \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_b}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_b}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}} \right) \\ &\quad + \frac{m_b}{2} \left( \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_a}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_a}{m_a + m_b} \dot{\mathbf{x}} \right) \\ &= \frac{m_a + m_b}{2} \left( \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \right) + \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$



Então

$$\mathcal{T} = \frac{M}{2} \|\dot{\mathbf{R}}\|^2 + \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2, \quad (1.9.5)$$

onde  $M = m_a + m_b$  é a *massa total* e  $m = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$  é a *massa reduzida*. Se tomamos (1.9.1) e (1.9.5) obtemos a Lagrangiana nas novas coordenadas

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} (\dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2 + \dot{R}_3^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \quad (1.9.6)$$

A equação de movimento na coordenada  $R_i$  está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_i} = \frac{d}{dt} (m \dot{R}_i) = m \ddot{R}_i = 0. \quad (1.9.7)$$

Da expressão anterior obtemos  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t$  com quaisquer vetores  $\mathbf{R}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Isto significa que o centro de massa para um sistema de dois corpos terá movimento uniforme em uma linha reta.

A equação de movimento na coordenada  $x_i$  é dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) + \frac{k x_i}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} = m \ddot{x}_i + \frac{k x_i}{\|\mathbf{x}\|^3} = 0. \quad (1.9.8)$$

Então, a equação para o movimento relativo está dada por

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}. \quad (1.9.9)$$

Para um corpo pequeno, próximo da superfície da Terra temos que a massa do corpo  $m_a$  é muito menor do que a massa da Terra  $m_b$ . Nesse caso, a massa reduzida é

$$m = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \approx \frac{m_a m_b}{m_b} = m_a. \quad (1.9.10)$$

Também,  $\mathbf{x} \approx R_0 \mathbf{e}_3$ , onde  $R_0$  é o raio da Terra e  $\mathbf{e}_3$  é o vetor perpendicular

à superfície. A equação de movimento (1.9.9) com  $k = Gm_a m_b$  vira

$$\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{e}_3 \quad (1.9.11)$$

onde  $g = Gm_b/R_0^2 = 9.8m/s^2$  é a aceleração gravitacional.

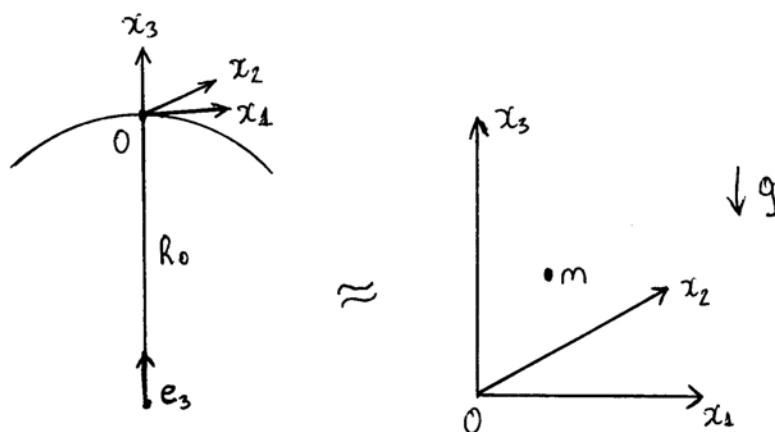


Figura 1.6: Campo gravitacional.

É fácil ver que a equação (1.9.11) corresponde à Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{v}^2 - mgh, \quad (1.9.12)$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $v = \|\dot{\mathbf{x}}\|$  é a velocidade e  $h$  é altura do corpo sobre a superfície da Terra. Essa expressão é aproximada e vale quando o ponto está próximo da superfície da Terra (Figura 1.6).

### Exemplo (Pêndulo)

Um pêndulo gravitacional ideal envolve um ponto material com massa  $m$  suspenso em um haste de comprimento  $\ell$  que não possui massa, é inextensível e inflexível. Como a base não faz movimento e a haste não tem massa, a Lagrangiana para o pêndulo está dada por (1.9.12).

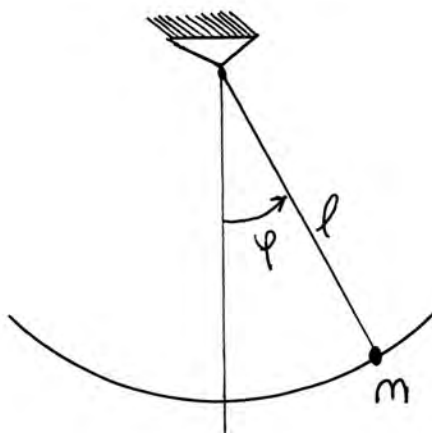


Figura 1.7: Pêndulo

Para o movimento em duas dimensões (num plano) podemos usar o ângulo  $\varphi$  como coordenada generalizada. Então  $v = l|\dot{\varphi}|$  e  $h = l(1 - \cos \varphi)$ . Logo a Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl(1 - \cos \varphi), \quad (1.9.13)$$

e a equação de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) - (-mgl \sin \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (1.9.14)$$

leva à equação do pêndulo

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1.9.15)$$

### Exemplo (Pêndulo com Base Móvel)

Quando a base do pêndulo faz oscilações harmônicas em direção vertical

(Figura 1.17) temos

$$v_x = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad v_y = l\dot{\varphi} \sin \varphi + a\Omega \sin \Omega t, \quad h = l(1 - \cos \varphi) - a \cos \Omega t. \quad (1.9.16)$$

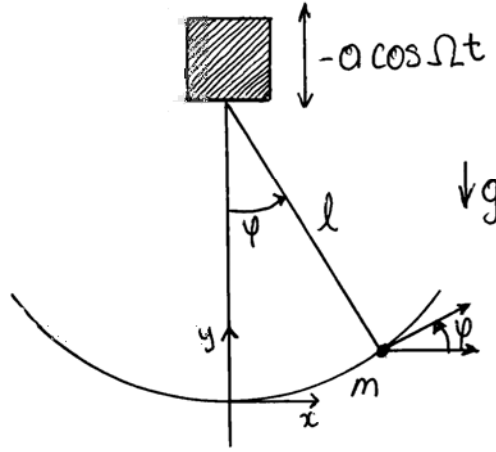


Figura 1.8: Pêndulo com base móvel.

Logo a Lagrangiana (1.9.12) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \left( l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + (l\dot{\varphi} \sin \varphi + a\Omega \sin \Omega t)^2 \right) \\ &\quad - mg(l(1 - \cos \varphi) - a \cos \Omega t) \\ &= \frac{m}{2} \left( l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}a\Omega \sin \varphi \sin \Omega t + a^2 \Omega^2 \sin^2 \Omega t \right) \\ &\quad - mg(l - l \cos \varphi - a \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (1.9.17)$$

Os termos que não dependem de  $\varphi$  ou  $\dot{\varphi}$  não entram na equação de Euler–Lagrange e podem ser cancelados. Daí

$$\mathcal{L} = ml^2 \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{a\Omega}{l} \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \Omega t + \frac{g}{l} \cos \varphi \right). \quad (1.9.18)$$

Usando essa expressão na equação de Euler–Lagrange em (1.9.14) temos

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\varphi} + \frac{a\Omega}{\ell} \sin \varphi \sin \Omega t \right) - \left( \frac{a\Omega}{\ell} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \Omega t - \frac{g}{\ell} \sin \varphi \right) = 0. \quad (1.9.19)$$

Simplificando obtemos a equação do pêndulo com base móvel

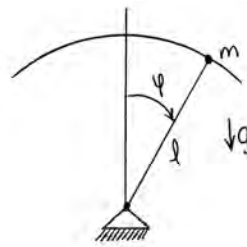
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \left( 1 + \frac{a\Omega^2}{g} \cos \Omega t \right) \sin \varphi = 0. \quad (1.9.20)$$

Para o caso em que a base esteja fixa ( $a = 0$ ) essa equação se reduz a (1.9.15).

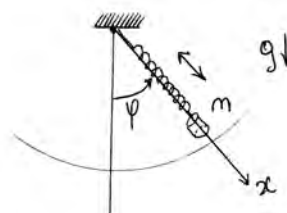
## Exercícios # 1

Achar as equações de movimento para os seguintes sistemas usando as coordenadas especificadas.

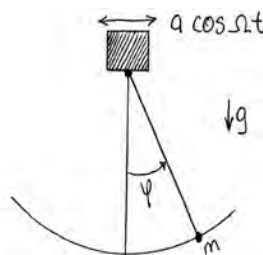
- (a) **Pêndulo invertido:** Use o ângulo  $\varphi$  em relação à posição vertical.



- (b) **Pêndulo com mola:** Use as coordenadas  $\varphi$  e  $x$ . A energia potencial está dada pela soma  $\mathcal{U} = mgh + \frac{k}{2}(x - x_0)^2$  onde  $k$  é a constante da mola e  $x_0$  é comprimento da mola em repouso.



- (c) **Pêndulo montado sobre uma base móvel horizontalmente:** Use o ângulo  $\varphi$ .



## 1.10 Simetrias

As posições do pêndulo estão definidas pelo ângulo  $\varphi$ . Como os ângulos  $\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , são equivalentes, todas as configurações do pêndulo estão dadas pelos pontos de um círculo  $S^1$  parametrizado por  $\varphi \bmod 2\pi$ . Similarmente as posições do pêndulo em três dimensões definem uma esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \ell^2\}$ . No caso geral, todas as configurações de um sistema mecânico estão definidas pelos pontos de uma variedade  $M$ , que pode ser vista como uma superfície suave de dimensão  $n$  no espaço  $\mathbb{R}^N$  de dimensão  $N \geq n$ . Localmente uma variedade  $M$  pode ser descrita pelas *coordenadas generalizadas*  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ , mas no caso geral essas coordenadas não podem ser estendidas a todo  $M$ . Desde agora vamos assumir que  $\mathbf{q}$  é o vetor de coordenadas generalizadas definidas em alguma parte de  $M$ , e  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é a Lagrangiana do sistema para as coordenadas escolhidas.

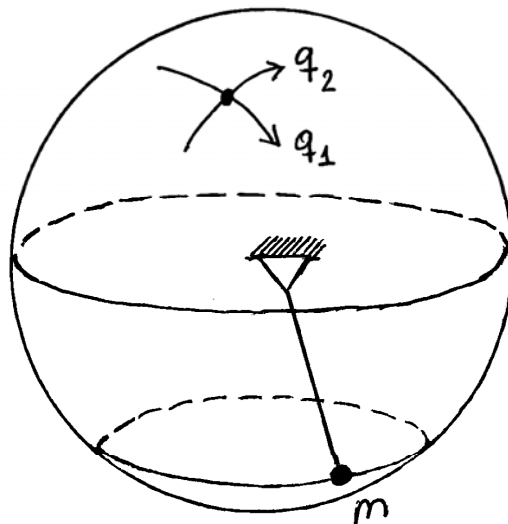


Figura 1.9: Pêndulo esférico e suas coordenadas generalizadas (locais).

Seja  $\mathbf{h} : M \mapsto M$  um difeomorfismo. Isto significa que  $\mathbf{h}$  é uma função invertível e os  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{h}^{-1}$  são diferenciáveis. O difeomorfismo  $\mathbf{h}$  pode ser representado pelas funções  $\mathbf{q}' = \mathbf{h}(\mathbf{q}) = (h_1(\mathbf{q}), \dots, h_n(\mathbf{q}))$  em coordenadas

locais  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^n$ . Como exemplo deste tipo de funções tomamos, no caso do pêndulo, a rotação  $\mathbf{h} : S^1 \mapsto S^1$  dado por  $\mathbf{h}(\varphi) = \varphi + \varphi_0$ , onde  $\varphi_0$  é uma constante. A relação entre as velocidades está dada pela regra da cadeia como  $\dot{q}'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$ , o que podemos escrever na forma vetorial

$$\dot{\mathbf{q}}' = \begin{pmatrix} \dot{q}'_1 \\ \vdots \\ \dot{q}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} \quad (1.10.1)$$

com a matriz jacobiana de  $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ .

O difeomorfismo  $\mathbf{h}$  chama-se de *simetria do sistema*, se ele deixa a Lagrangiana invariante, *i.e.*,

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}'), \quad \mathbf{q}' = \mathbf{h}(\mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{q}}' = \frac{d\mathbf{h}}{dt}. \quad (1.10.2)$$

Neste caso o difeomorfismo também preserva a ação  $\mathcal{S}$  e, por isso, as leis de movimento. Isso implica, que a simetria leva as trajetórias físicas  $\mathbf{q}(t)$  às trajetórias físicas  $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}(t))$ .

Para clarificar essa definição temos o seguinte exemplo. Consideremos o movimento de uma massa  $m$  no campo gravitacional sobre uma superfície periódica com período  $x_0$ . A Lagrangiana deste sistema é

$$\mathcal{L}(x, v) = \frac{mv^2}{2} - mgh(x), \quad h(x + x_0) = h(x). \quad (1.10.3)$$

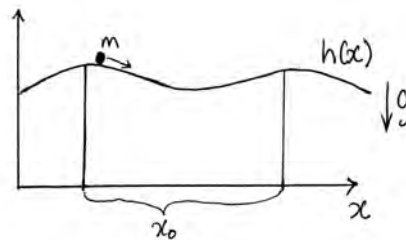


Figura 1.10



O deslocamento por um período leva a  $x' = x + x_0$ ,  $v' = v$  e então a nova Lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}(x', v') = \frac{m(v')^2}{2} - mgh(x + x_0) = \frac{mv^2}{2} - mgh(x) = \mathcal{L}(x, v), \quad (1.10.4)$$

onde usamos a periodicidade de  $h(x)$ . Daí vemos que o deslocamento pelo período é uma simetria, e  $x'(t) = x(t) + x_0$  é a trajetória física.

Para o que vem a seguir precisaremos da noção de *grupo uniparamétrico de simetrias*. Esse grupo está determinado pelos difeomorfismos  $\mathbf{h}^s$  que dependem de um parâmetro real  $s \in \mathbb{R}$  ou angular  $s \in S^1$ . Esse grupo uniparamétrico deve possuir as seguintes propriedades:

1.  $\mathbf{h}^{s_1} \mathbf{h}^{s_2} = \mathbf{h}^{s_1+s_2}$ . Isso significa que  $\mathbf{q}'' = \mathbf{h}^{s_1}(\mathbf{h}^{s_2}(\mathbf{q})) = \mathbf{h}^{s_1+s_2}(\mathbf{q})$ .
2.  $\mathbf{h}^s$  é uma simetria para todo  $s$ .

Note da primeira propriedade que  $\mathbf{h}^0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$  é o elemento neutro e  $\mathbf{h}^{-s}$  é o elemento simétrico de  $\mathbf{h}^s$ .

No exemplo anterior (Figura 1.10), as deslocações não formam um grupo uniparamétrico de simetrias porque o parâmetro de deslocação  $s = kx_0$  só pode ter valores discretos com  $k \in \mathbb{Z}$ . Mas no caso de  $h(x) = \text{const}$  as deslocações para qualquer  $s \in \mathbb{R}$  são simétricas e formam um grupo uniparamétrico.

## 1.11 Teorema de Noether

Uma função  $C = C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é dita *constante de movimento* ou em outras palavras ela está conservada, se  $C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{const}$  ao longo de qualquer trajetória física  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ . Então uma constante de movimento deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}C(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = 0. \quad (1.11.1)$$

Essa relação chama-se de *lei de conservação*. O próximo teorema relaciona constantes de movimento com grupos uniparamétricos de simetrias.

**Teorema 1.11.1** (Noether). *Para todo grupo uniparamétrico de simetrias  $h^s(\mathbf{q})$  temos uma constante de movimento dada por*

$$C = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial h_j^s}{\partial s} \Bigg|_{s=0}, \quad (1.11.2)$$

onde a expressão é calculada em  $s = 0$ .

*Demonstração.* Analisaremos o caso em que  $q \in \mathbb{R}$ . O caso para dimensões maiores segue a mesma lógica. Para a função  $\mathcal{L}(t, q', \dot{q}')$  com  $q' = h^s(q)$  em (1.10.2) calcularemos a seguinte derivada

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial h^s}{\partial s} \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \right) \frac{\partial h^s}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial h^s}{\partial s} \right).$$

Usando a equação de Euler–Lagrange (válida ao longo da trajetória física  $q'(t)$ ) para o primeiro termo e trocando a ordem de derivação no segundo termo, temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial h^s}{\partial s} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial h^s}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{dh^s}{dt} \right).$$

Lembrando que  $q' = h^s(q)$ ,  $\dot{q}' = \frac{dh^s}{dt}$  e usando a condição de simetria (1.10.2) obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial h^s}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(t, q', \dot{q}') = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = 0,$$

porque  $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$  não depende de  $s$ . Então esta expressão define a lei de conservação para qualquer  $s$ . Para voltar à coordenada  $q$ , tomamos  $s = 0$ , o que implica  $q' = h^0(q) = q$  e  $\dot{q}' = \frac{dh^0}{dt} = \dot{q}$ . Neste caso vemos que

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial h^s}{\partial s} \right)_{s=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial h^s}{\partial s} \Bigg|_{s=0} = C$$

é conservada ao longo da trajetória física.  $\square$

## 1.12 Momento Linear

A maioria das leis de conservação na física estão baseadas em alguma simetria (grupo uniparamétrico). A homogeneidade e isotropia do espaço no grupo galileu são responsáveis pela conservação do momento linear e angular, respectivamente. Homogeneidade do espaço é a simetria pelo deslocamento, o que implica que a Lagrangiana é invariante pela transformação de coordenadas

$$\mathbf{x}'_{\alpha} = \mathbf{x}_{\alpha} + \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}'_{\alpha} = \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} \quad (1.12.1)$$

de todas as partículas  $\alpha = a, b, \dots$  com o mesmo  $\mathbf{x}_0$  (Seção 1.7).

Temos três grupos uniparamétricos de simetria dados pelo deslocamento da primeira, segunda e terceira coordenada:

$$\mathbf{h}_1^s : x_{1\alpha} \mapsto x_{1\alpha} + s, \quad \alpha = a, b, \dots \quad (1.12.2)$$

$$\mathbf{h}_2^s : x_{2\alpha} \mapsto x_{2\alpha} + s, \quad \alpha = a, b, \dots \quad (1.12.3)$$

$$\mathbf{h}_3^s : x_{3\alpha} \mapsto x_{3\alpha} + s, \quad \alpha = a, b, \dots \quad (1.12.4)$$

Pelo Teorema de Noether, temos três constantes de movimento formando o vetor chamado *momento linear*

$$\mathbf{P} = (C_1, C_2, C_3). \quad (1.12.5)$$

Para a primeira componente usando (1.7.1), (1.7.2), (1.12.2) em (1.11.2) obtemos

$$C_1 = \sum_{\alpha=a,b,\dots} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\alpha}} \frac{\partial h_{1\alpha}^s}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_{\alpha} \dot{x}_{1\alpha}, \quad (1.12.6)$$

onde usamos que  $x'_{1\alpha} = h_{1\alpha}^s = x_{1\alpha} + s$  com  $\frac{\partial h_{1\alpha}^s}{\partial s} = 1$ . Similarmente, obtemos

as componentes  $C_2$  e  $C_3$ . Então o movimento linear do sistema dado por

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} \quad (1.12.7)$$

é conservado ao longo da trajetória física. A componente da soma  $\mathbf{P}_{\alpha} = m_{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}$  chama-se momento linear da partícula  $\alpha$  e individualmente não se conserva no caso geral.

A consequência imediata da conservação do momento linear é que o centro de massa do sistema definido como

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{x}_a + m_b \mathbf{x}_b + \dots}{m_a + m_b + \dots} \quad (1.12.8)$$

tem velocidade constante

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{P}}{m_a + m_b + \dots} = \text{const.} \quad (1.12.9)$$

Então  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t$ , *i.e.*, o centro de massa do sistema isolado faz movimento uniforme em uma linha reta.

A conservação do momento linear pode ser violada pela “quebra” da simetria. Por exemplo, consideremos o sistema de partículas em uma caixa rígida. Fronteiras rígidas podem ser modeladas por um potencial  $\mathcal{U}$  que vira infinito em uma vizinhança pequena da parede e é zero fora dessa vizinhança. Um sistema em uma caixa não possui homogeneidade no espaço e por isso não conserva o momento linear. Em outro caso, em um cilindro rígido a homogeneidade somente é mantida ao longo do eixo. Nesse caso a componente do momento linear do sistema ao longo do eixo do cilindro é conservada ( $P_3$  no caso da Figura 1.11).

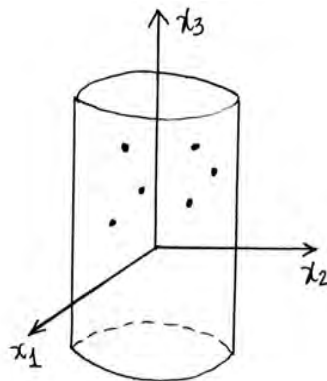


Figura 1.11: Momento linear ao longo do eixo do cilindro é conservado.

### 1.13 Momento Angular

Consideremos a simetria ligada à isotropia do espaço, *i.e.*, simetria com respeito a rotação. Vamos analisar a rotação no plano  $(x_1, x_2)$  pelo ângulo  $\varphi$ . A relação entre as novas coordenadas com as antigas é dada por

$$x'_1 = h_1^\varphi = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad (1.13.1)$$

$$x'_2 = h_2^\varphi = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \quad (1.13.2)$$

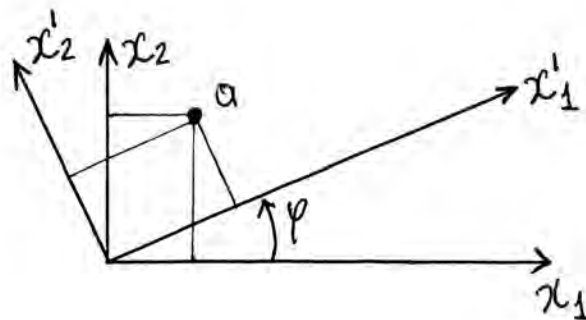


Figura 1.12: Rotação no plano.

Essa transformação aplicada a todos os pontos do sistema define o grupo uniparamétrico de simetrias  $\mathbf{h}^\varphi = (h_1^\varphi, h_2^\varphi)$  com parâmetro  $\varphi \in S^1$ . O Teorema de Noether define a constante de movimento, que (tomando a com sinal oposto) chama-se de *momento angular* e denota-se por  $M_3$ .

Usando (1.7.1), (1.7.2) com as relações (1.13.1), (1.13.2) em (1.11.2) e trocando o sinal, obtemos

$$\begin{aligned}
M_3 &= - \sum_{\alpha=a,b,\dots} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\alpha}} \frac{\partial h_{1\alpha}^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\alpha}} \frac{\partial h_{2\alpha}^\varphi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \\
&= - \sum_{\alpha=a,b,\dots} [m_\alpha \dot{x}_{1\alpha} (-x_{1\alpha} \sin \varphi + x_{2\alpha} \cos \varphi) \\
&\quad + m_\alpha \dot{x}_{2\alpha} (-x_{1\alpha} \cos \varphi - x_{2\alpha} \sin \varphi)]_{\varphi=0} \\
&= \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_\alpha (x_{1\alpha} \dot{x}_{2\alpha} - x_{2\alpha} \dot{x}_{1\alpha}). \tag{1.13.3}
\end{aligned}$$

Os momentos angulares do sistema  $M_1$  e  $M_2$  estão definidos similarmente, considerando a rotação nos planos  $(x_2, x_3)$  e  $(x_3, x_1)$ , respectivamente. O resultado pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_\alpha \begin{pmatrix} x_{2\alpha} \dot{x}_{3\alpha} - x_{3\alpha} \dot{x}_{2\alpha} \\ x_{3\alpha} \dot{x}_{1\alpha} - x_{1\alpha} \dot{x}_{3\alpha} \\ x_{1\alpha} \dot{x}_{2\alpha} - x_{2\alpha} \dot{x}_{1\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\alpha=a,b,\dots} m_\alpha \mathbf{x}_\alpha \times \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \sum_{\alpha=a,b,\dots} \mathbf{x}_\alpha \times \mathbf{P}_\alpha. \tag{1.13.4}
\end{aligned}$$

A última expressão inclui o produto vetorial das coordenadas e momento linear da partícula.

O momento angular  $\mathbf{M}$  do sistema isolado é conservado ao longo de cada trajetória física. Limitando o espaço com paredes rígidas podemos quebrar a simetria (isotropia) e então violar a lei de conservação. Por exemplo, os dois exemplos dados na Figura 1.13 (tubo circular e o espaço entre dois planos rígidos) só possuem simetria com respeito à rotação no plano  $(x_1, x_2)$  e então conservam somente a componente  $M_3$  do momento

angular. Note que o sistema no tubo também conserva o momento linear  $P_3$ , quando o sistema dentro dos planos conserva os momentos  $P_1$  e  $P_2$ .

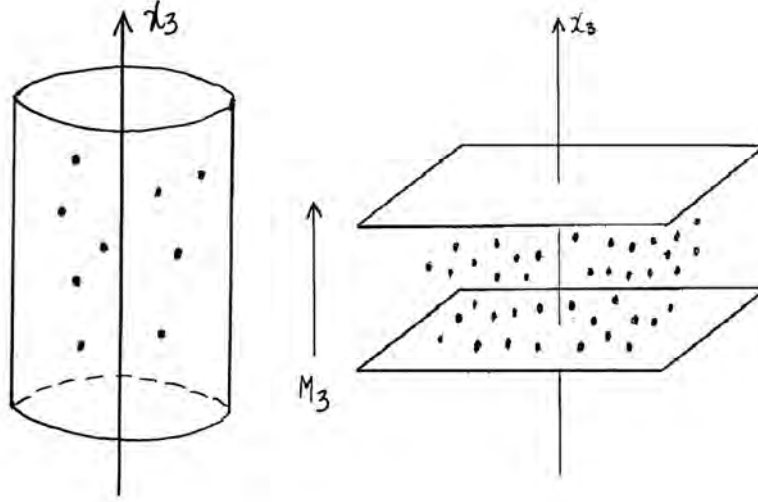


Figura 1.13: Sistemas que conservam o momento angular  $M_3$ .

## 1.14 Generalização do Teorema de Noether

Consideremos as transformações que mudam coordenadas junto com o tempo

$$t' = h_0^s(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q}' = \mathbf{h}^s(\mathbf{q}, t) = (h_1^s(\mathbf{q}, t), \dots, h_n^s(\mathbf{q}, t)). \quad (1.14.1)$$

Assumiremos que estas transformações formam um grupo uniparamétrico de difeomorfismos  $(h_0^s, \mathbf{h}^s) : \mathbb{R} \times M \mapsto \mathbb{R} \times M$  com um parâmetro  $s$  (Seção 1.10).

Para tratar a questão de simetria usaremos a nova variável  $\tau$  (tempo fictício) com coordenadas generalizadas  $(Q_0, \mathbf{Q}) = (t, \mathbf{q})$ . Nesse caso, escrevemos a ação como

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \left( t, \mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{L}_1 \left( Q_0, \mathbf{Q}, \frac{dQ_0}{d\tau}, \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau} \right) d\tau, \quad (1.14.2)$$

onde  $Q_0(\tau) = t(\tau)$  e  $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{q}(t(\tau))$ . Usando as relações

$$dt = \frac{dt}{d\tau}d\tau = \frac{dQ_0}{d\tau}d\tau, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{dQ_0}{d\tau} \quad (1.14.3)$$

em (1.14.2) achamos a Lagrangiana  $\mathcal{L}_1$  na forma

$$\mathcal{L}_1 \left( Q_0, \mathbf{Q}, \dot{Q}_0, \dot{\mathbf{Q}} \right) = \mathcal{L} \left( Q_0, \mathbf{Q}, \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{\dot{Q}_0} \right) \dot{Q}_0, \quad (1.14.4)$$

onde  $\dot{Q}_0 = \frac{dQ_0}{d\tau}$  e  $\dot{\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau}$ .

As relações (1.14.1) definem a transformação entre  $(Q_0, \mathbf{Q})$  e  $(Q'_0, \mathbf{Q}')$  na forma

$$Q'_0 = h_0^s(\mathbf{Q}, Q_0), \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{h}^s(\mathbf{Q}, Q_0) \quad (1.14.5)$$

que não depende do novo tempo  $\tau$ . Então, seguindo a Seção 1.10,  $(h_0^s, \mathbf{h}^s)$  é um grupo uniparamétrico de simetria, se

$$\mathcal{L}_1 \left( Q_0, \mathbf{Q}, \dot{Q}_0, \dot{\mathbf{Q}} \right) = \mathcal{L}_1 \left( Q'_0, \mathbf{Q}', \dot{Q}'_0, \dot{\mathbf{Q}}' \right) \quad (1.14.6)$$

com

$$\dot{Q}'_i = \sum_{j=0}^n \frac{\partial h_i^s}{\partial Q_j} \dot{Q}_j, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.14.7)$$

O Teorema de Noether (Seção 1.11) afirma que o grupo uniparamétrico de simetria gera a constante de movimento

$$C = \sum_{j=0}^n \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial h_j^s}{\partial s} \Big|_{s=0}. \quad (1.14.8)$$

Usando (1.14.4) e pela regra da cadeia achamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{Q}_0} = \mathcal{L} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\dot{Q}_j}{\dot{Q}_0} = \mathcal{L} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.14.9)$$

onde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  com  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left( Q_0, \mathbf{Q}, \frac{\dot{\mathbf{Q}}}{\dot{Q}_0} \right)$ . Substituindo essas ex-



pressões em (1.14.8) leva a

$$C = \left( \mathcal{L} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial h_0^s}{\partial s} \Big|_{s=0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial h_j^s}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (1.14.10)$$

escrito em coordenadas originais  $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . A constante (1.14.10) é conservada ao longo de qualquer trajetória física.

Note que o conceito de simetria no Teorema de Noether implica invariância da ação sobre transformação das coordenadas e do tempo em (1.14.2). Por isso, esse teorema não se aplica no caso da transformação de Galileu considerada nas Seções 1.4 e 1.5, porque essa transformação leva ao termo adicional da forma  $\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{q})$  na Lagrangiana e o termo extra da forma (1.2.12) na ação. Por isso, a transformação de Galileu não leva às leis de conservação.

## 1.15 Conservação de Energia

A conservação de energia está ligada à homogeneidade do tempo. Nesse caso, o grupo uniparamétrico de simetrias está dado pelo deslocamento do tempo

$$t' = h_0^s(\mathbf{q}, t) = t + s, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{h}^s(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.15.1)$$

As relações (1.14.5) levam a

$$Q'_0 = Q_0 + s, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{Q}, \quad \dot{Q}'_0 = Q_0, \quad \dot{\mathbf{Q}}' = \dot{\mathbf{Q}}. \quad (1.15.2)$$

É fácil ver que a condição de simetria (1.14.6) para a Lagrangiana (1.14.4) é satisfeita quando  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  não depende explicitamente do tempo  $t$ . Essa última condição é válida para qualquer sistema isolado (Seção 1.7).

A constante de movimento dada por (1.14.10) e (1.15.1) com sinal oposto

$$E = -C = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (1.15.3)$$

chama-se de *energia*.

No caso de  $n$  pontos materiais temos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (1.15.4)$$

onde  $\mathcal{T}$  é uma função homogênea de grau 2 nas velocidades  $\dot{q}_j$  dada pela relação (1.7.7). Podemos escrever (1.15.3) como

$$E = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (\mathcal{T} - \mathcal{U}) = \mathcal{T} + \mathcal{U}, \quad (1.15.5)$$

onde a soma no segundo termo é igual a  $2\mathcal{T}$  para qualquer função homogênea de grau 2, *e.g.*,  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(\dot{q}^2)\dot{q} = 2\dot{q}^2$ . Então a energia do sistema isolado é dada pela soma da energia cinética e a energia potencial. A energia é conservada ao longo de qualquer trajetória física.

## 1.16 Problema de Kepler

Como exemplo, consideremos o movimento relativo de dois corpos com interação gravitacional dada pela equação

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad (1.16.1)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de posição relativa e  $m$  é a massa reduzida do sistema (Seção 1.9). A Lagrangiana para este sistema está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2}{2} + \frac{k}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (1.16.2)$$

O movimento relativo não possui homogeneidade no espaço  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  porque a translação  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  muda o segundo termo, mas a isotropia (independência de  $\mathcal{L}$  da direção no espaço  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ) leva à conservação do momento angular (Seção 1.13), *i.e.*,

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} = \text{const.} \quad (1.16.3)$$

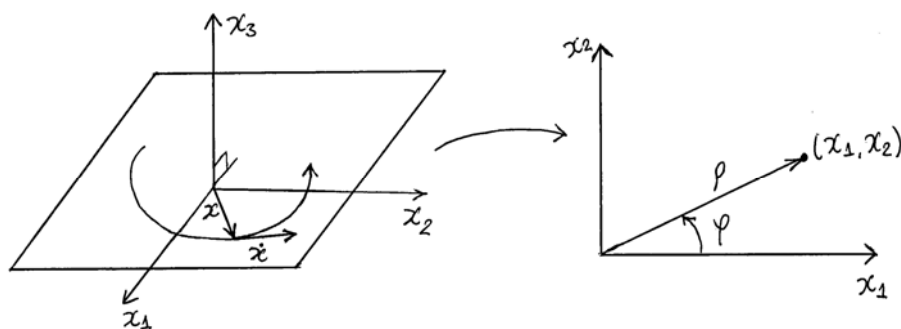


Figura 1.14

Escolhemos um sistema de coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  com eixo  $x_3$  ao longo do vetor  $\mathbf{M}$ . Pela conservação (1.16.3), o vetor  $\mathbf{x}$  e a velocidade  $\dot{\mathbf{x}}$  pertencem ao plano  $(x_1, x_2)$ . Em coordenadas polares temos

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi. \quad (1.16.4)$$

Isso implica que

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (1.16.5)$$

Usando (1.16.4) e (1.16.5) na expressão (1.16.3) escrito na forma

$$M_3 = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = \text{const} \quad (1.16.6)$$

calculamos

$$\begin{aligned} \frac{M_3}{m} &= \rho \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi) - \rho \sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= \rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + \rho^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi = \rho^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.16.7)$$

aula04:eq17 Reescrevemos a expressão anterior como

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_3}{m\rho^2}. \quad (1.16.8)$$

O significado geométrico dessa última equaçãoaula04:eq17 é que o vetor  $\boldsymbol{x}$  descreve áreas iguais em tempos iguais (Lei de Áreas de Kepler). Para ver isso calculamos a derivada da área  $A$  na Figura 1.15 pelo tempo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\rho^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho^2}{2} \frac{M_3}{m\rho^2} = \frac{M_3}{2m} = \text{const}. \quad (1.16.9)$$

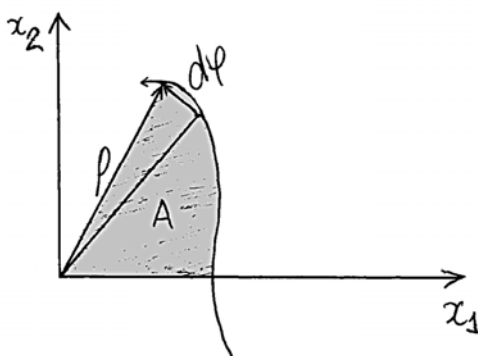


Figura 1.15: Lei de áreas de Kepler.

Como a Lagrangiana (1.16.2) não depende do tempo temos conservação

de energia, *i.e.*,

$$aula04 : eq17E = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2}{2} - \frac{k}{\|\mathbf{x}\|} = \text{const.} \quad (1.16.10)$$

Em coordenadas polares (1.16.4), (1.16.5) temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{\rho} \\ &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2 \varphi + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) - \frac{k}{\rho} \\ &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{k}{\rho}. \end{aligned} \quad (1.16.11)$$

Usando (1.16.8) obtemos

$$E = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \mathcal{U}_{eff}(\rho), \quad \mathcal{U}_{eff}(\rho) = \frac{M_3^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho}, \quad (1.16.12)$$

onde  $\mathcal{U}_{eff}$  é chamada de *energia potencial efetiva*.

Resolvendo (1.16.12) em relação a  $\dot{\rho}$  obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - \mathcal{U}_{eff}(\rho))} \quad (1.16.13)$$

isolando  $dt$ , temos a seguinte expressão

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \mathcal{U}_{eff}(\rho))}}. \quad (1.16.14)$$

Integrando ambos lados obtemos

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \mathcal{U}_{eff}(\rho))}}. \quad (1.16.15)$$

Essa função define a função  $\rho(t)$  na forma implícita.

Para achar a forma das trajetórias usamos (1.16.8) e (1.16.14) e obtemos

$$d\varphi = \frac{M_3}{m\rho^2} dt = \frac{M_3}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{U}_{eff}(\rho))}} \quad (1.16.16)$$

A expressão anterior com  $\mathcal{U}_{eff}(\rho)$  em (1.16.12) nos leva a

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{M_3^2}{2m\rho^2} + \frac{k}{\rho} \right)}}{M_3} = \frac{\rho^2}{P} \sqrt{e^2 - 1 - \frac{P^2}{\rho^2} - \frac{2P}{\rho}}, \quad (1.16.17)$$

onde

$$P = \frac{M_3^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM_3^2}{mk^2}}. \quad (1.16.18)$$

A solução da equação (1.16.17) é

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad (1.16.19)$$

o que pode ser verificado por substituição. As expressões (1.16.15) e (1.16.19) resolvem o problema de Kepler na forma implícita.

De (1.16.12) podemos ver que

$$\mathcal{U}_{eff}(\rho) \leq E, \quad (1.16.20)$$

onde a forma de  $\mathcal{U}_{eff}(\rho)$  é mostrada na Figura 1.16. Quando  $E < 0$ , o movimento é limitado no espaço. Quando  $E > 0$ , o movimento não é limitado.

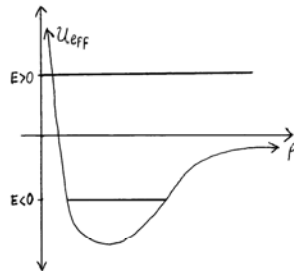


Figura 1.16: Energia potencial efetiva em problemas de Kepler.

Mais precisamente, quando  $E < 0$  a equação (1.16.19) define trajetórias elípticas com excentricidade  $e < 1$ .

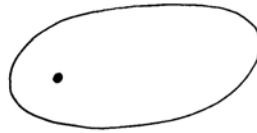


Figura 1.17: Órbita elíptica.

Quando  $E = 0$ , temos trajetórias parabólicas ( $e = 1$ ).



Figura 1.18: Órbita parabólica.

Quando  $E > 0$ , temos trajetórias hiperbólicas ( $e > 1$ ).



Figura 1.19: Órbita hiperbólica.

## 1.17 Forças e Trabalho

Consideremos um sistema determinado pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}, \quad (1.17.1)$$

onde

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_S(\dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{T}_A(\dot{\mathbf{Q}}), \quad (1.17.2)$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}_S(\mathbf{q}) + \mathcal{U}_A(\mathbf{Q}) + \mathcal{U}_{SA}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}). \quad (1.17.3)$$

Aqui  $\mathcal{T}_S$  e  $\mathcal{U}_S$  são a energia cinética e energia potencial do nosso sistema que tem coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ ;  $\mathcal{T}_A$ ,  $\mathcal{U}_A$  e  $\mathbf{Q}$  são energias e coordenadas descrevendo o ambiente do sistema;  $\mathcal{U}_{SA}$  é a energia de interação do sistema com o seu ambiente.

A equação de Euler–Lagrange para o nosso sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{U}_{SA}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (1.17.4)$$

pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (1.17.5)$$

onde as funções

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \mathcal{U}_S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = -\frac{\partial \mathcal{U}_{SA}}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.17.6)$$

são chamadas de forças internas e externas, respectivamente.

Para uma força externa podemos definir o trabalho virtual como o produto escalar com o vetor de variação virtual  $\delta \mathbf{q}$ , *i.e.*,

$$\delta A = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (1.17.7)$$

Similarmente, usando a variação de coordenadas como  $\delta \mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} dt$  definimos



o *trabalho* da força  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  no intervalo de tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$  como

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt. \quad (1.17.8)$$

Usando (1.17.5) podemos reescrever (1.17.7) como

$$\delta A = -\frac{\partial \mathcal{U}_{\text{SA}}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} \approx -(\mathcal{U}_{\text{SA}}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \mathbf{Q}) - \mathcal{U}_{\text{SA}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})). \quad (1.17.9)$$

Esta expressão ajuda definir as forças externas para varias definições de coordenadas generalizadas. Sejam  $(\mathbf{q}', \mathbf{Q}')$  outras coordenadas generalizadas descrevendo o mesmo sistema e seu ambiente. Para a energia potencial de interação temos  $\mathcal{U}_{\text{SA}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \mathcal{U}'_{\text{SA}}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}')$ . Então, de (1.17.9) segue

$$\delta A \approx -(\mathcal{U}'_{\text{SA}}(\mathbf{q}' + \delta \mathbf{q}', \mathbf{Q}') - \mathcal{U}'_{\text{SA}}(\mathbf{q}', \mathbf{Q}')) \approx -\frac{\partial \mathcal{U}'_{\text{SA}}}{\partial \mathbf{q}'} \cdot \delta \mathbf{q}' = \delta A', \quad (1.17.10)$$

o que significa que o trabalho não depende da definição das coordenadas. Quando o movimento dos corpos do ambiente é dado por uma função determinada  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$  temos

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{\partial \mathcal{U}_{\text{SA}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(t))}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{U}_{\text{ext}}(t, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.17.11)$$

Então as forças externas (neste caso chamadas *forças potenciais*) dependem somente das coordenadas do sistema,  $\mathbf{q}$ , e são definidas através da energia potencial do tipo  $\mathcal{U}_{\text{ext}}(t, \mathbf{q}) = \mathcal{U}_{\text{SA}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(t))$ .

## Exemplo (Pêndulo)

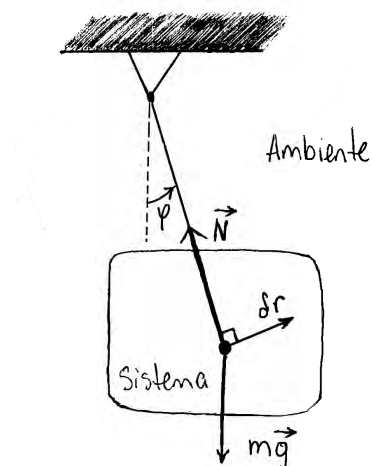


Figura 1.20: Forças do pêndulo.

Para este caso podemos considerar a massa como nosso sistema e o resto como ambiente, *i.e.*,

$$\mathcal{T}_S = \frac{m\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \mathcal{U}_S = 0, \quad \mathcal{U}_{SA} = -mgl \cos \varphi. \quad (1.17.12)$$

Então

$$m\ell\ddot{\varphi} = F_\varphi, \quad F_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{U}_{SA}}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad (1.17.13)$$

onde  $F_\varphi$  é uma força potencial. Agora analisamos o trabalho de cada força na Fig. 1.20, onde  $|\mathbf{F}| = mg$  e  $|\delta\mathbf{r}| = \ell\delta\varphi$ :

$$\delta A_F = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = -mgl \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta A_N = \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \quad (1.17.14)$$

Obtemos o mesmo valor para o trabalho usando a coordenada  $\varphi$  :

$$\delta A = \delta A_F + \delta A_N = -mgl \sin \varphi \delta\varphi = F_\varphi \delta\varphi. \quad (1.17.15)$$

## 1.18 Forças Dissipativas

Para determinar a força externa em (1.17.6) devemos conhecer o movimento de todas as partículas do ambiente,  $\mathbf{Q}$ , o qual na maioria das vezes não é possível. Então tentaremos achar uma expressão aproximada no caso da *força dissipativa*  $\mathbf{F}_{\text{diss}}$  (como, por exemplo, fricção viscosa). Esta força depende só da velocidade do sistema  $\dot{\mathbf{q}}$  e é zero quando  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ . Quando a força é pequena, podemos usar a seguinte expressão linearizada

$$\mathbf{F}_{\text{diss}} = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}, \quad (1.18.1)$$

onde  $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{n \times n}$  é uma matriz, *i.e.*, a  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{F}_{\text{diss}}$  é dada por

$$[\mathbf{F}_{\text{diss}}]_i = -\sum_{j=1}^n d_{ij}\dot{q}_j. \quad (1.18.2)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  foi provada ser simétrica ( $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ ) e positiva definida  $\mathbf{D} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{q}^T \mathbf{D} \mathbf{q} > 0$  para qualquer  $\mathbf{q} \neq 0$ ) na mecânica estatística (Princípio de Onsager).

Baseados nestas propriedades podemos escrever a *função dissipativa de Rayleigh* a seguir

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n d_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.18.3)$$

onde  $f > 0$  para qualquer  $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ . Essa expressão é introduzida para poder escrever a força dissipativa na forma

$$\mathbf{F}_{\text{diss}} = -\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (1.18.4)$$

onde suas componentes são dadas por (1.18.2).

Para o caso unidimensional,  $q \in \mathbb{R}$ , com a Lagrangiana dada por  $\mathcal{L} =$

$\mathcal{T}(\dot{q}) - \mathcal{U}(q)$ , a equação de Euler–Lagrange com a força dissipativa será

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = \mathbf{F}_{\text{diss}} = -D\dot{q}. \quad (1.18.5)$$

Agora, calculamos a derivada da energia usando a expressão anterior para  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q}$  e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathcal{T}(\dot{q}) + \mathcal{U}(q)) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} \dot{q} \\ &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \left( -D\dot{q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \dot{q}. \end{aligned} \quad (1.18.6)$$

Logo, para  $\mathcal{T} = m\frac{\dot{q}^2}{2}$  obtemos

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{q}\ddot{q} + (-D\dot{q} - m\ddot{q})\dot{q} = -D\dot{q}^2 = -2f < 0, \quad (1.18.7)$$

o que significa que a força dissipativa sempre diminui a energia do sistema.

## 1.19 Mecânica Hamiltoniana

Seja  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  função de Lagrange para um sistema mecânico com coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . *Momentos generalizados* são definidos como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.19.1)$$

Como  $\mathcal{L}$  é um polinômio de grau 2 em velocidades  $\dot{q}_i$ , a equação (1.19.1) é linear em  $\dot{q}_i$  no lado direito. Então, (1.19.1) pode ser considerada como sistema de  $n$  equações lineares em respeito a  $\dot{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se a matriz de coeficientes deste sistema linear não é singular, podemos resolvê-lo na forma

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (1.19.2)$$

A *função Hamiltoniana* é definida como

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \right)_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}, \quad (1.19.3)$$

onde as velocidades  $\dot{q}_i$  são escritas em termos de  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  usando (1.19.2). Derivando a função Hamiltoniana (1.19.3) com a regra da cadeia leva a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_j} p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \dot{q}_j}. \quad (1.19.4)$$

As somas se cancelam usando (1.19.1), e as equações de Euler–Lagrange para o termo  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$  levam a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{d}{dt} p_j = -\dot{p}_j. \quad (1.19.5)$$

Similarmente, temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_j} p_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j. \quad (1.19.6)$$

Então, de (1.19.5) e (1.19.6) temos as equações

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.19.7)$$

para coordenadas e momentos generalizados, que são chamados de *equações de Hamilton*. Estas equações tem como vantagem que as coordenadas  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  entram na forma simétrica: trocando as coordenadas e sinal da Hamiltoniana  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathcal{H}) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathcal{H})$  não muda as equações em (1.19.7).

Quando a Lagrangiana  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  não depende do tempo explicitamente (então, a energia é conservada), temos também  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = E = \text{const}, \quad (1.19.8)$$

onde usamos a expressão da energia em (1.15.3). Então,  $\mathcal{H} = \text{const}$  ao longo da trajetória física  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  com o valor da Hamiltoniana igual a energia do sistema. Este fato pode ser verificado diretamente usando as equações (1.19.7) como

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (1.19.9)$$

## Exercícios # 2

### Teoria Restrita da Relatividade na Reta, $x \in \mathbb{R}$

Vamos considerar  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ . Agora definimos a *métrica de Minkowsky* com a “distancia” entre dois pontos  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  do espaço e tempo determinado por

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2},$$

onde a constante  $c$  é a velocidade da luz. Todas as transformações de coordenadas  $(x, t)$  que preservam a distância  $s$  formam o grupo de Poincaré.

Na teoria restrita da relatividade o grupo de Poincaré é considerado como a simetria do sistema físico. Como  $ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2}$  é preservado pelo grupo de Poincaré, a ação que é invariante sobre esta simetria é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= a \int_{\text{ponto } 0}^{\text{ponto } 1} ds = a \int_{\text{ponto } 0}^{\text{ponto } 1} \sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2} = a \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \\ &= a \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{c^2 - v^2} dt. \end{aligned}$$

Da expressão anterior vemos que

$$\mathcal{L} = a\sqrt{c^2 - v^2},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é a constante a ser determinada. Como  $\mathcal{L}$  deve ser real, as velocidades  $v$  nesta teoria não podem ser maiores à da velocidade da luz.

Baseado no anterior os exercícios são:

- (a) **(Grupo de Poincaré)**. Achar todas as transformações de coordenadas (lineares)

$$t \rightarrow t', \quad x \rightarrow x'$$

que preservam a distância  $s$ .

- (b) Achar a transformação de velocidade pelo grupo de Poincaré, *i.e.*, achar  $v' = \frac{dx'}{dt'}$  em termos de  $x$  e  $v = \frac{dx}{dt}$ . Mostrar que a velocidade da luz,  $v = c$ , é preservada sob a grupo de Poincaré.
- (c) (**Limite Clássico**). Para o caso em que  $|v| \ll c$  deveremos ter

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{\text{Clássico}} = m \frac{v^2}{2} + \text{const.}$$

Achar a constante  $a$  na Lagrangiana

$$\mathcal{L} = a \sqrt{c^2 - v^2}.$$

- (d) Achar o momento linear  $P$  e a energia  $E$  usando o Teorema de Noether. Derivar a formula de Einstein,  $E = mc^2$ , para uma partícula em repouso, *i.e.*, quando  $v = 0$ .



---

## REFERÊNCIAS

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1st edition, 1989.
- [2] V.I. Arnold. *Lecture Notes on Partial Differential Equations*. Springer, 1st. edition, 2004.
- [3] E.M. Landau, L.D. & Lifschitz. *Mechanics (Vol. 1)*. Pergamon Press, 3rd. edition, 1976.
- [4] E.M. Landau, L.D. & Lifschitz. *Fluid Mechanics (Vol. 6)*. Pergamon Press, 2nd. edition, 1987.
- [5] A.P. Seyranian and A. A. Mailybaev. *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1st edition, 2003.
- [6] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, 1st edition, 1974.