Equações Diferenciais Parciais - Lista 2

Data de entrega: 10 de Outubro

Entregar os exercícios (1) [1-4] ; (2) ; (3) b) ; (4) a) ; (5) ; (7) b) ; (9) ; 12 (a)

---

(1) Fritz John, seção 1.9 Problemas [1-5].

(2) Para uma função contínua periódica $f(x)$ com derivada contínua por partes, prove que a sua série de Fourier converge uniformemente para $f(x)$. Prove a identidade de Parseval:

$$||\hat{f}||_2^2 = \frac{1}{2\pi}||f||_2^2, \tag{1}$$

e

$$(\hat{f}|\hat{g}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}^*(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^*(x) = \frac{1}{2\pi}(f|g) \tag{2}$$

(Use os teoremas provados nas aulas)

(3) Calcule os coeficientes de Fourier para as seguintes funções $C_{per}([-\pi,\pi))$:

a) $f(x) = -x\ , \ \ -\pi \leq x < \pi;$
b) $f(x) = sen^2(x)\ ,x \in \mathbb{R};$
c) $f(x) = \pi - |x|\ , \ \ -\pi \leq x < \pi;$
d) $f(x) = 1\ ,se\ \ |x| \leq \frac{\pi}{2}, f(x) = 0\ ,se\ \ \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi;$

(4) Seja $f \in C_{per}$ uma função real.

a) Prove que se f é uma função par, então seus coeficientes de Fourier são números reais satisfazendo $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$. Mostre que, nesse caso, a série de Fourier de f é uma série de cossenos.

b) Prove que se f é uma função ímpar, então seus coeficientes de Fourier são números imaginários e $\hat{f}(0) = 0$. Mostre que, nesse caso, a série de Fourier de f é uma série de senos.

(5) Considere a função $f \in C_{per}$ tal que $f(x) = -x$ para $-\pi \leq x < \pi$.

a) Use a série de Fourier de f em $x = \pi/2$ para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\ . \tag{3}$$

b) A série de Fourier de f converge uniformemente para f? Por quê?
c) Use a identidade de Parseval para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\ , \tag{4}$$

e também

$$\sum_{k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}\ . \tag{5}$$

(6) Mostre que a delta de Dirac representa uma distribuição. Mostre que sua derivada não pode ser representada como uma medida. Em outras palavras, não podemos escrever

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x), \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \,, \tag{6}$$

onde μ é uma medida de Radon.

(7) Calcule as derivadas (no sentido de distribuições) de

a) $|x|$,
b) $ln(|x|)$.

(8) Prove que $(fg)' = f'g + fg'$ para um produto de uma distribuição temperada f C^∞ e uma função de crescimento lento g.

(9) Prove que $f(x) = e^x \notin S'(\mathbb{R})$. Mais precisamente,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \tag{7}$$

define uma distribuição, mas não pode ser estendida para $S(\mathbb{R})$ como um funcional linear. (Dica: Deixe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \psi \geq 0$ ser tal que $\psi(x) = 1$ se $x \in [-1,1]$ e $\psi(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \backslash [-2,2]$. Considere a sequência $\psi_j(x) = e^{-j/2}\psi(x/j)$.)

(10) Derive a transformada de Fourier para a função Gaussiana

$$\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8}$$

(11) Formule e prove o lema de Riemann-Lebesgue para a transformada de Fourier.

(12) Ache a transformada de Fourier para

a) $e^{-|x|}$;
b) x^n;