

# Ondas: da análise matemática ao fenômeno natural\*

Alexei A. Mailybaev<sup>†</sup>

14 de Março de 2017

## 1 Equação da onda

A equação da onda descreve vários fenômenos de diferentes naturezas e origens. Essa equação governa a evolução de perturbações perto de um equilíbrio em um meio contínuo. Nesta seção, começaremos com uma simples demonstração da equação da onda para um “cristal” unidimensional, e então seguiremos para uma dedução mais genérica.

### 1.1 Um sistema de massas e molas

Vamos considerar um modelo simples para infinitos pontos de massa  $m$  idênticos colocados ao longo do eixo  $x$  com distâncias iguais  $\ell$  e conectados por molas idênticas, Fig. 1. Denotaremos por  $x_n = n\ell$  a posição do  $n$ -ésimo ponto de massa no equilíbrio, onde  $n \in \mathbb{Z}$  numera as massas. Oscilações desse sistema podem ser descritas usando um vetor de dimensão infinita de deslocamentos horizontais:

$$(\dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots). \quad (1.1)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para a  $n$ -ésima massa, temos

$$m\ddot{u}_n = F_n^- + F_n^+, \quad (1.2)$$

onde as duas forças  $F_n^-$  e  $F_n^+$  são aplicadas por ambos os lados. Como a deformação da mola entre as massas  $n$  e  $n-1$  vale  $u_n - u_{n-1}$ , as forças podem ser determinadas pela Lei de Hooke:

$$F_n^- = -k(u_n - u_{n-1}), \quad F_n^+ = k(u_{n+1} - u_n), \quad (1.3)$$

onde  $k$  é a constante elástica de cada mola. Substituindo (1.3) em (1.2), temos

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \quad (1.4)$$

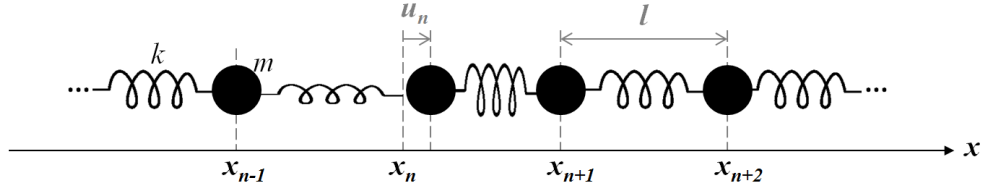


Figura 1: Um sistema de massas e molas modelando oscilações em um cristal unidimensional.

Assumiremos agora que as distâncias  $\ell$  são muito pequenas. Então, é possível considerar uma “visão macroscópica”, onde estão presentes apenas as oscilações de larga escala. Matematicamente, isso significa que assumiremos que a solução é próxima de uma deformação suave descrita pela função  $u(x, t)$ , tal que  $u_n(t) = u(x_n, t)$ , conforme Fig. 2. Para o lado direito da equação e (1.4) isso significa

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = u(x_{n+1}) + u(x_{n-1}) - 2u(x_n) \quad (1.5)$$

(todos os termos são tomados no mesmo instante  $t$ ). Agora, retomamos que  $x_n = n\ell$  e expandimos os termos com argumentos  $x_{n+1} = x_n + \ell$  e  $x_{n-1} = x_n - \ell$  em série de Taylor para pequenos  $\ell$ . O resultado deste cálculo é

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = \left[ u(x_n) + \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ell^2 + o(\ell^2) \right] + \left[ u(x_n) - \frac{\partial u}{\partial x} \ell + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ell^2 + o(\ell^2) \right] - 2u(x_n). \quad (1.6)$$

Depois do cancelamento de termos, temos

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x_n} \ell^2 + o(\ell^2), \quad (1.7)$$

onde as derivadas são tomadas em  $x = x_n$ . Substituindo estes termos de volta em (1.4) com  $u_n(t) = u(x_n, t)$  e dividindo ambos os lados por  $m$ , obtemos

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x_n} = \frac{k\ell^2}{m} \left[ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x_n} + o(1) \right]. \quad (1.8)$$

No limite para pequenas distâncias  $\ell \rightarrow 0$ , podemos definir a densidade de massa por comprimento  $\rho = m/\ell$  e o coeficiente elástico por comprimento  $K = k\ell$ . Então o coeficiente em (1.8) pode ser escrito como

$$\frac{k\ell^2}{m} = \frac{k\ell}{m/\ell} \rightarrow \frac{K}{\rho}. \quad (1.9)$$

\*O autor é grato a Marlon M. López F. e Vítor de Oliveira Sudbrack pela suas ajuda na preparação destas notas.

†Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: alexei@impa.br

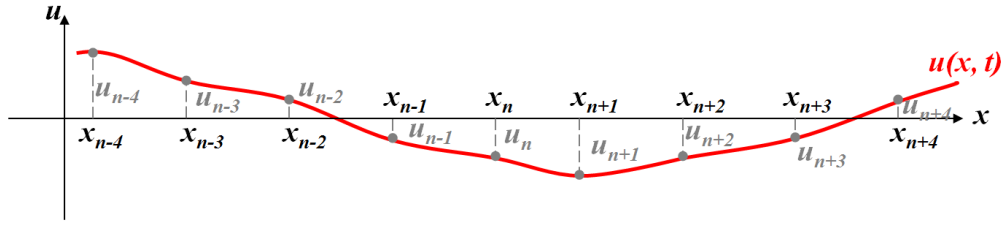


Figura 2: Descrições microscópica,  $u_n(t)$ , e macroscópica,  $u(x, t)$ , do sistema.

Neste limite, é natural assumir que ambos  $K$  e  $\rho$  são fixos. Portanto, denotando  $a^2 = K/\rho$  e desprezando os termos  $o(1)$  em (1.8), temos como limite a equação como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.10)$$

Essa é a *equação da onda*, e o parâmetro  $a$  é chamado de *velocidade do som*.

## 1.2 Demonstração genérica

Assumiremos agora que a equação da onda (1.10) pode ser demonstrada heurísticamente, baseada num conjunto simples e genérico de hipóteses. Focaremos no caso quando o estado do sistema em cada instante  $t$  é determinado por uma função escalar  $u(x)$  real e suave. Também consideraremos o espaço unidimensional  $x \in \mathbb{R}$ , e após comentaremos a extensão para espaços de dimensão maiores (dois ou três). As hipóteses necessárias são as seguintes:

- (H1) Para qualquer  $u_0 \in \mathbb{R}$ , o estado constante  $u(x) \equiv u_0$  é um ponto de equilíbrio estável.
- (H2) Consideraremos pequenas oscilações perto do equilíbrio constante  $u(x, t) \equiv 0$ .
- (H3) O sistema é homogêneo no espaço e no tempo.
- (H4) O sistema tem paridade simétrica,  $x \mapsto -x$ .
- (H5) O sistema é temporalmente reversível,  $t \mapsto -t$ .
- (H6) As oscilações são de longa escala no espaço e no tempo (ondas longas).

O significado exato e o papel de cada hipótese ficarão mais claros durante a demonstração a seguir.

Com o intuito de construir a equação mais genérica de movimento para a função  $u(x, t)$ , assumimos que essa função pode ser representada por sua expansão em série de Taylor. Em

outras palavras, a equação de movimento pode ser escrita em termos de todas as suas derivadas  $\partial^{n+m}u/\partial x^n\partial t^m$ ,  $n, m \geq 0$ , tomadas num ponto específico  $(x, t)$ :

$$\mathcal{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \dots\right) = 0. \quad (1.11)$$

Aqui  $\mathcal{F}$  é uma (ainda desconhecida) função de um número infinito de argumentos. Nota-se que essa função não pode depender explicitamente de  $x$  ou  $t$  devido a hipótese de homogeneidade (H3), porque homogeneidade implica que as propriedades do sistema são exatamente as mesmas em cada ponto do espaço e tempo.

Pela hipótese (H2), estamos interessados apenas em pequenas oscilações, o que significa que todos os argumentos da função  $\mathcal{F}$  na equação (1.11) são pequenos. Isso nos permite linearizar essa equação (mantendo termos lineares e negligenciando termos não lineares de ordem maior):

$$c_{00}u + c_{10}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{01}\frac{\partial u}{\partial t} + c_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dots = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial t^m} = 0, \quad (1.12)$$

onde  $c_{nm}$  são coeficientes reais. A hipótese (H1) de equilíbrio em uma constante arbitrária implica que

$$c_{00} = 0, \quad (1.13)$$

isso é, não existe termo proporcional a  $u$  em (1.12). Da mesma forma, as hipóteses de simetria (H4) e (H5) implicam que os coeficientes desaparecem para cada derivada de ordem ímpar com respeito a  $x$  ou  $t$  (caso contrário, este termo não seria invariante com respeito a reversibilidade temporal e paridade espacial):

$$c_{nm} = 0 \quad \text{para } n \text{ ímpar ou } m \text{ ímpar.} \quad (1.14)$$

Na aproximação de ondas longas, dada pela última hipótese (H6), nós assumimos que a dependência de  $u(x, t)$  em ambas as variáveis é lenta. Isso significa que as ondas têm um comprimento longo e, portanto, variam lentamente no tempo. Formalmente, essa condição pode ser escrita como a expressão

$$u(x, t) = U\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right) \quad (1.15)$$

para longos parâmetros  $L$  (comprimento de onda) e  $T$  (período da onda) e a função  $U(\xi, \tau)$  com escalas típicas  $\delta\xi \sim \delta\tau \sim 1$ , conf. Fig. 3. Neste caso, cada derivada se torna

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial t^m} = \frac{1}{L^n T^m} \frac{\partial^{n+m}U}{\partial \xi^n \partial \tau^m}. \quad (1.16)$$

A aproximação de ondas longas nessa representação pode ser compreendida como o limite para  $L$  e  $T$  grandes, o que significa que nós precisamos manter apenas os termos maiores (1.16). Estes

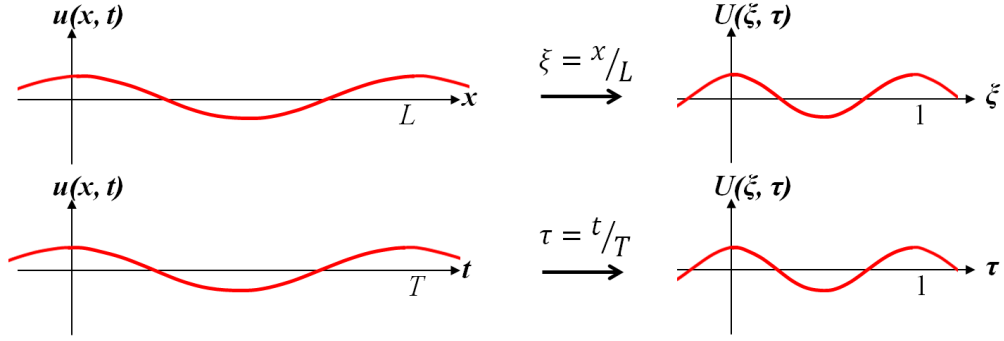


Figura 3: Aproximação de ondas longas com escala espacial típica  $L$  (comprimento de onda) e escala temporal  $T$  (período da onda).

são os termos com os menores  $k$  e  $m$ , e de acordo com (1.13) e (1.14) os maiores termos são dados por  $(n, m) = (2, 0)$  e  $(n, m) = (0, 2)$ . Mantendo apenas esses dois termos, nós escrevemos (1.12) como

$$c_{20} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{02} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.17)$$

Dependendo do sinal da razão  $c_{20}/c_{02}$ , essa equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.18)$$

onde  $a^2 = |c_{20}/c_{02}|$ .

Por fim, é possível mostrar que o sinal positivo em (1.18) pode ser descartado a partir da hipótese (H1) de estabilidade. De fato, a equação com sinal positivo tem a seguinte solução

$$u(x, t) = e^{akt} \cos kx, \quad (1.19)$$

que é limitada no espaço para cada dado instante, mas cresce exponencialmente no tempo. Tal comportamento indica que um estado de equilíbrio constante  $u(x, t) \equiv 0$  é instável. Como resultado, apenas o sinal negativo é permitido em (1.18) e encontramos a *equação da onda*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.20)$$

No caso de um espaço tridimensional, um argumento similar fornece uma equação que contém segundas derivadas com respeito a todas as coordenadas espaciais,  $\partial^2 u/\partial x^2$ ,  $\partial^2 u/\partial y^2$  e  $\partial^2 u/\partial z^2$ , com diferentes coeficientes. É possível impor mais uma hipótese assumindo a isotropia do espaço (invariância das equações em todas as direções). Nesse caso, os coeficientes das três derivadas segundas devem ser iguais e nós chegamos na equação da onda tridimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.21)$$

Um argumento similar pode ser usado para a equação da onda em espaços de qualquer outra dimensão.

### 1.3 Exemplos de equações da onda na natureza

Devido à natureza genérica das hipóteses (H1-H6), há vastos exemplos de equação da onda nas ciências da natureza e engenharias. Seguem alguns listados abaixo:

- Vibrações de uma corda com tensão  $T$  e densidade linear  $\rho$ :  $u$  é o deslocamento,  $a = \sqrt{T/\rho}$ .
- Ondas sonoras em gases ou líquidos:  $u$  é o deslocamento longitudinal e  $a$  é a velocidade do som.
- Ondas eletromagnéticas:  $u$  é o campo eletromagnético variável e  $a$  é a velocidade da luz.
- Ondas transversais ou longitudinais em sólidos:  $u$  é o deslocamento,  $a$  é a velocidade da onda.
- Ondas sobre águas rasas (ondas não mais compridas que a profundidade d'água  $H$ ):  $u$  é a elevação superficial,  $a = \sqrt{gH}$ .

## 2 Solução de D'Alembert para equação da onda

Começamos resolvendo a equação da onda unidimensional (1.20) numa reta infinita  $x \in \mathbb{R}$ . Por agora, realizaremos uma mudança de variáveis

$$u(x, t) = v(\xi, \eta), \quad \xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (2.1)$$

As derivadas são agora determinadas usando a regra da cadeia, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) v, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial v}{\partial \xi} + a \frac{\partial v}{\partial \eta} = a \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) v. \quad (2.3)$$

Da mesma maneira, para as derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 v = a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right). \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) na equação da onda (1.20), após cancelamentos, encontramos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.6)$$

Uma solução genérica para essa equação pode ser obtida interpretando (2.6) como

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Essa equação impõe que a expressão dentro de parênteses não dependa de  $\eta$  e, portanto,

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = F(\xi) \quad (2.8)$$

para uma função arbitrária  $F(\xi)$ . Integrando essa expressão com respeito a  $\xi$ , fixando  $\eta$ , temos

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad (2.9)$$

onde  $f(\xi) = \int F(\xi) d\xi$  e  $g(\eta)$  é uma constante arbitrária de integração. é fácil verificar que (2.9) é de fato uma solução de (2.6). Voltando às variáveis originais (2.1) temos

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (2.10)$$

Mostramos que a solução genérica pode ser representada como a soma de duas funções quaisquer  $f(\xi)$  e  $g(\eta)$ , que são constantes ao longo das retas  $x - at = \text{const}$  e  $x + at = \text{const}$ , respectivamente. Essas duas famílias de retas são chamadas retas características ou, simplesmente, *características*, conf. Fig. 4. A função  $f(x - at)$  é uma solução de onda viajante que se move para direita com velocidade constante  $a$  mantendo a mesma forma. Da mesma forma, a função  $g(x + at)$  é uma solução de onda viajante que se move com velocidade constante  $-a$  para o outro sentido.

Considera agora o problema de Cauchy: encontrar a solução que satisfaça condições iniciais arbitrárias

$$t = 0 : \quad u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x). \quad (2.11)$$

Aqui  $\varphi(x)$  descreve a forma inicial e  $\psi(x)$  é a velocidade inicial da solução. Usando (2.10) em  $t = 0$  e a regra da cadeia, temos

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = -af'(x) + ag'(x), \quad (2.12)$$

onde a linha denota a derivada da função. Dessas duas relações, é possível expressar as funções

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2} - \frac{\psi(x)}{2a}, \quad g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2} + \frac{\psi(x)}{2a}. \quad (2.13)$$

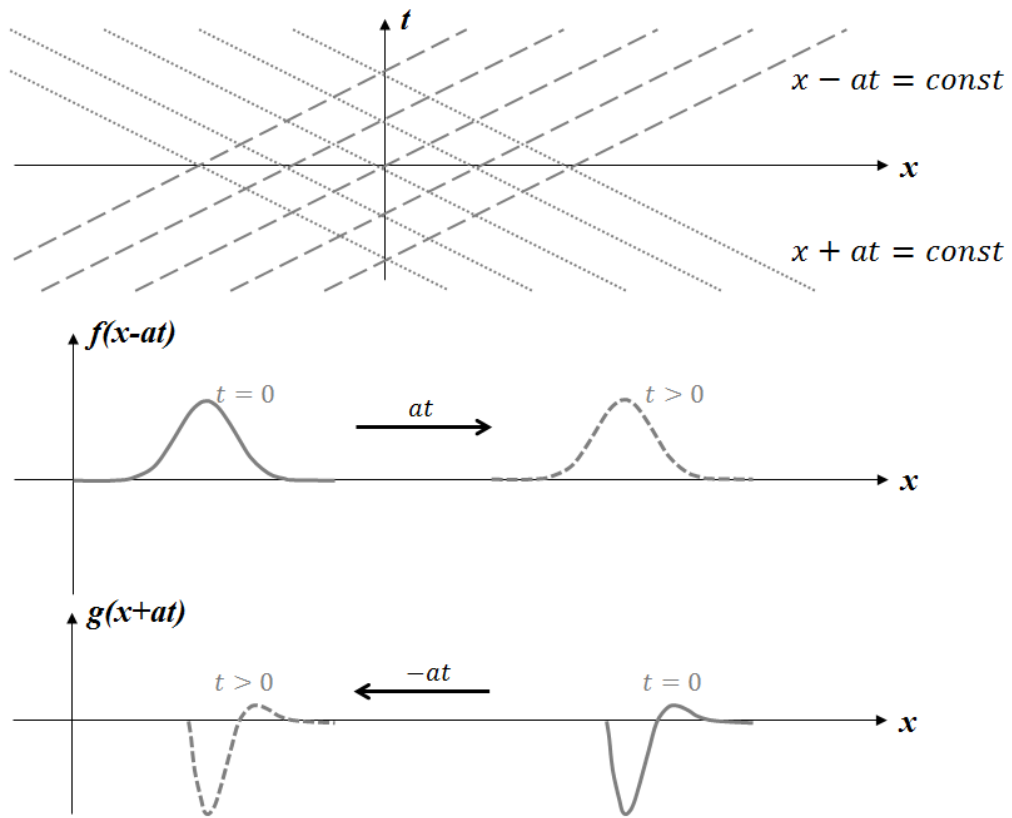


Figura 4: Soluções da equação da onda como ondas viajantes.



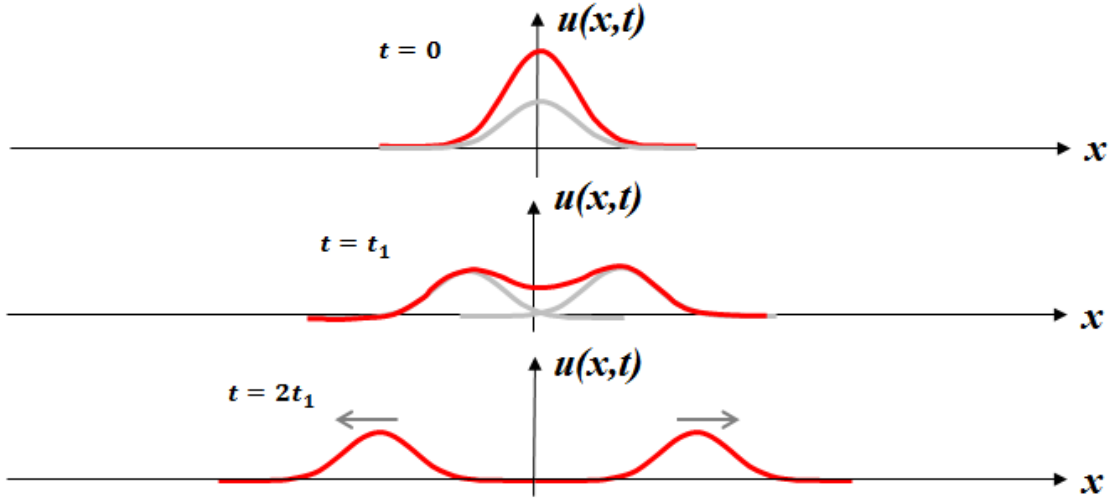


Figura 5: Solução da equação da onda para o problema de Cauchy no caso  $\psi(x) = 0$ .

Integrando essas igualdade com respeito a  $x$ , obtemos

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \int_0^x \frac{\psi(x)}{2a} dx + c_1, \quad g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \int_0^x \frac{\psi(x)}{2a} dx + c_2, \quad (2.14)$$

com alguma constante de integração  $c_1$  e  $c_2$ . Substituindo (2.14) na primeira relação (2.12), obtemos a condição

$$c_1 + c_2 = 0. \quad (2.15)$$

A solução de d'Alembert final é obtida depois de substituir (2.14) e (2.15) em (2.10), que dá

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx. \quad (2.16)$$

é possível verificar que, em qualquer dado ponto  $x$  e tempo  $t$ , a solução  $u(x, t)$  depende apenas da forma inicial nos dois pontos  $x \pm at$  e da velocidade inicial dentro do intervalo entre esses dois pontos.

Como um exemplo específico, considere o caso em que o deslocamento inicial  $\varphi(x)$  é não-nulo, mas não há velocidade inicial,  $\psi(x) \equiv 0$ . A solução para essa caso é a soma de duas ondas  $\frac{1}{2}\varphi(x - at)$  e  $\frac{1}{2}\varphi(x + at)$ . Portanto, a solução primeiro se expande e eventualmente se separa em duas ondas se movendo em direções opostas, veja Fig. 5. Cada onda tem a mesma forma da condição inicial, porém com metade da amplitude.

### 3 Série de Fourier

Para resolver a equação da onda num intervalo finito é necessário o conceito de série de Fourier, o qual será descrito nessa seção. A série de Fourier (na forma complexa) é dada por

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad (3.1)$$

onde  $c_n$  são coeficientes complexos e  $x$  é um parâmetro real. Vamos assumir que a série converge absolutamente:  $\sum |c_n| < \infty$ . A função  $f(x)$  é real para todos  $x$  se os coeficientes correspondentes à  $n$  e  $-n$  são complexos conjugados, i.e.,

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad (3.2)$$

em particular,  $c_0$  deve ser real. A versão real da série de Fourier é obtida pegando a parte real de (3.1), que é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.3)$$

com coeficientes reais  $a_n$  e  $b_n$ . A comparação de (3.1) e (3.2) com (3.3) gera a relação entre os coeficientes nas duas resentações:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ para } n > 0, \quad c_{-n} = \overline{c_n}. \quad (3.4)$$

**Teorema 3.1.** *O  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier é dado por*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Usando a expressão (3.1) com  $m$  substituindo  $n$  na integral (3.5), temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{i(m-n)x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx. \quad (3.6)$$

A integração para  $m$  e  $n$  inteiros pode ser calculada como

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad (3.7)$$

o que fornece a fórmula (3.5). □

Para os coeficientes reais da série de Fourier (3.4), temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.8)$$

**Teorema 3.2.** Para uma função  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$  suave e periódica e dada uma potência  $a \geq 0$ , existe uma constante  $C$  (dependente da função  $f$  e potência  $a$ ) tal que

$$|c_n| < C|n|^{-a} \quad \text{para } |n| \neq 0. \quad (3.9)$$

*Demonstração.* Usando o teorema 3.1, temos

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)e^{-inx}| dx = C, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx. \quad (3.10)$$

Isso prova o teorema para  $a = 0$ . Agora, vamos integrar primeiro por partes, que fornece

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx} dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde os termos no limite de integração desaparecem por causa da periodicidade da função  $f(x)e^{-inx}$ . Tal qual para (3.10), nós obtemos

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi|n|} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx = C|n|^{-1}, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx. \quad (3.12)$$

O que prova o teorema para  $a = 1$ . Repetindo estas integrações por partes em (3.11), a afirmação do teorema pode ser provada por indução para qualquer potência  $a > 0$ .  $\square$

**Corolário 3.1.** Para qualquer função suave e periódica,  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ , a série de Fourier (3.1) com coeficientes (3.5) converge.

*Demonstração.* Pelo teorema 3.2, temos

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ikn} \right| < \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < |c_0| + C_a \sum_{|n| > 0} |n|^{-a}.$$

A última expressão converge para um  $a$  suficientemente grande, por exemplo,  $a = 2$ . Isso implica que a série converge absolutamente para qualquer  $x$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** A série de Fourier para uma função duas vezes diferenciável,  $f \in C^2(\mathbb{S}^1)$ , converge para a função:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{para } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx. \quad (3.13)$$

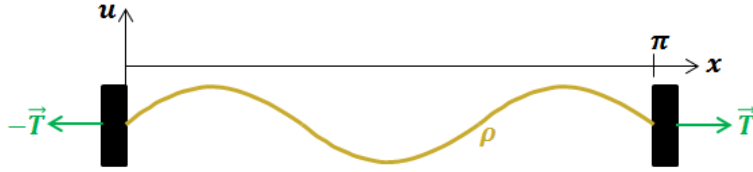


Figura 6: Vibrações de uma corda.

A demonstração pode ser encontrada no livro: V.I. Arnold. Lectures on partial differential equations (Springer, 2013). Na teoria de análise funcional, este teorema pode ser estendido para função periódicas diferenciáveis  $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$  ou até mesmo para espaços funcionais mais abrangentes.

Esse teorema pode ser interpretado de uma forma geométrica, através da introdução do produto escalar de duas funções periódicas  $f(x)$  e  $g(x)$  como

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.14)$$

De acordo com (3.7), o conjunto de funções  $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$  forma uma base ortogonal no espaço de função periódicas. Então os coeficientes de Fourier  $c_n$  em (3.13) são as projeções de  $f(x)$  nos elementos correspondentes da base, e a série de Fourier representa a expansão de  $f(x)$  naquela base.

## 4 Vibrações em corda: método espectral

Vamos considerar vibrações de uma corda descritas pela equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.1)$$

neste caso a velocidade da onda é  $a = \sqrt{T/\rho}$  com a tensão  $T$  e a densidade linear  $\rho$ . A função  $u(x, t)$  descreve a forma da corda, Fig. 6. Para nossa análise, é conveniente reescalar o eixo longitudinal de tal forma que o comprimento da corda seja  $\ell = \pi$ . As extremidades da corda são fixas, o que fornece as seguintes condições de contorno

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (4.2)$$

### 4.1 Frequências e modos de vibração

Procuramos soluções da forma complexa

$$u = \varphi(x) e^{i\omega t}, \quad (4.3)$$

onde  $\omega$  é uma frequência de vibração e  $\varphi(x)$  é uma autofunção. De (4.1) temos que

$$-\omega^2 \varphi e^{i\omega t} - a^2 \varphi''(x) e^{i\omega t} = 0. \quad (4.4)$$

Junto com as condições de contorno (4.2), obtemos

$$\varphi'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \quad (4.5)$$

Uma solução genérica para a primeira equação é

$$\varphi = A \cos\left(\frac{\omega}{a}x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{a}x\right). \quad (4.6)$$

Então a primeira condição de contorno  $\varphi(x) = 0$  demanda  $A = 0$  e a segunda condição de contorno  $\varphi(\pi) = 0$  fornece

$$B \sin\left(\frac{\omega}{a}\pi\right) = 0. \quad (4.7)$$

Como procuramos por soluções não triviais  $u(x, t)$ , as frequências e os autovetores correspondentes encontrados são

$$\omega = \pm an, \quad \varphi(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Ambas as partes real e imaginária de (4.3), proporcionais à  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ , são soluções do mesmo problema. Pegando as suas combinações lineares com coeficientes quaisquer  $A_n$  e  $B_n$  obtemos a solução geral do problema na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos ant + B_n \sin ant) \sin nx. \quad (4.9)$$

Essas soluções representam a combinação de modos vibracionais com frequências  $\omega = ak$ , que são também conhecidas como o tom fundamental ( $n = 1$ ) e os sobretons ( $n > 1$ ), Fig. 7.

## 4.2 Problema de Cauchy

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$t = 0 : \quad u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), \quad (4.10)$$

para qualquer forma inicial da corda dada  $\varphi(x)$  e velocidade inicial denotada por  $\psi(x)$ . Assumiremos que ambos  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  são funções suaves e que satisfazem as condições de contorno  $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(\pi) = \psi(\pi) = 0$ . Essas propriedades permitem expandir a função  $\varphi(x)$  primeiro para uma função ímpar  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  no intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , e então por periodicidade para toda a reta  $x \in \mathbb{R}$ , conf. Fig. 8. Isso significa que a função  $\varphi(x)$  pode ser representada

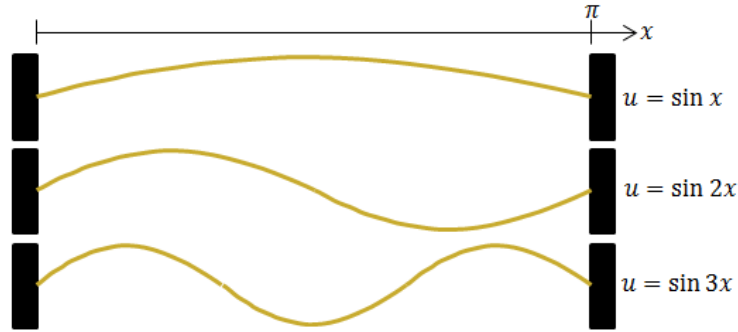


Figura 7: Modo fundamental  $\sin x$ , e sobretons  $\sin nx$  com  $n = 2, 3, \dots$

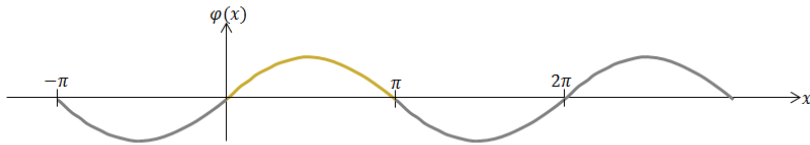


Figura 8: Extensão de  $\varphi(x)$  para a função  $2\pi$ -periódica.

na forma de uma série de Fourier (3.3). O mesmo, claro, pode ser feito com a  $\psi(x)$ . Como as funções ímpares  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  podem conter apenas termos ímpares na série de Fourier, que são  $b_n \sin nx$ , temos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx. \quad (4.11)$$

Usando as expressões (3.8) para os coeficientes de Fourier, encontramos

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx, \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx \, dx, \quad (4.12)$$

onde reduzimos o intervalo de integração para  $[-\pi, \pi]$  para  $[0, \pi]$  porque os produtos de  $\varphi(x) \sin nx$  e  $\psi(x) \sin nx$  são funções pares; isso gera um fator 2 extra nos coeficientes.

Comparando  $\varphi(t)$  de (4.11) e  $u(x, t)$  de (4.9) em  $t = 0$ , obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx. \quad (4.13)$$

Da mesma forma, comparando  $\psi(t)$  de (4.11) e  $\partial u / \partial t$  de (4.9) tomados em  $t = 0$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n B_n \sin nx. \quad (4.14)$$

As igualdades (4.13) e (4.14) são satisfeitas escolhendo

$$A_n = b_n, \quad B_n = \frac{\tilde{b}_n}{an}. \quad (4.15)$$

Como resultado, obtemos a solução para o problema de Cauchy na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \cos ant + \frac{\tilde{b}_n}{an} \sin ant \right) \sin nx. \quad (4.16)$$

**Exercício 4.1.** *Encontre as soluções em série de Fourier para a corda vibrante com as seguintes condições iniciais:  $\varphi(x) = x$  em  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $\varphi(x) = \pi - x$  em  $\pi/2 \leq x \leq \pi$  e  $\psi(x) = 0$  (corda esticada no meio).*

Essa teoria da vibração pode ser estendida para espaços de dimensão maiores, como por exemplo, vibrações de uma membrana elástica ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ ) ou vibrações acústicas em um ressoador ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ). Nesses exemplos, as equações de movimento são dadas pela equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0 \quad (4.17)$$

com as condições de contorno Dirichlet

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.18)$$

Essa última expressão significa que a função  $u(x, t)$  está definida dentro do domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ), e é zero no contorno deste domínio denotado por  $\partial\Omega$ . Uma solução da forma  $u(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t}$  fornece o seguinte problema de autovalores para  $\omega$  e  $\varphi(\mathbf{r})$

$$\Delta\varphi + \frac{\omega^2}{a^2}\varphi = 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.19)$$

Resolvendo esse problema, obtemos as frequências normais e modos vibracionais do sistema. Uma solução geral é a combinação linear destes modos de vibração.

## 5 Equação da onda com dissipação

A dissipação é um processo temporalmente irreversível, violando a nossa hipótese (H5) na demonstração da equação da onda na Seção 1.2. Essa hipótese foi usada justamente para retirar as derivadas de ordem ímpar com respeito ao tempo. Portanto, para levar em consideração uma pequena dissipação, temos que colocar esses termos com derivadas ímpares de volta na equação.

Na aproximação de onda longa, os termos mais importantes são aqueles com a menor ordem das derivadas. Portanto, o maior termo com uma derivada de ordem ímpar é  $\partial u / \partial t$ . Levando esse termo em consideração, a equação da onda se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5.1)$$

onde  $\varepsilon > 0$  é um pequeno coeficiente de dissipação. É possível verificar que o sinal positivo no termo da dissipação é necessário para estabilidade; veja o exercício abaixo.

O termo de dissipação em (5.1) depende apenas do deslocamento do sistema, mas não de sua deformação (uma mudança em  $u$  com respeito a  $x$ ). Esse tipo de dissipação é chamada externa. A dissipação externa se origina, por exemplo, da resistência do ar durante a vibração da corda.

Em muitos casos a dissipação externa pode ser muito pequena ou então até mesmo inexistente. Por exemplo, a dissipação em meio contínuo requer a sua deformação. Isso significa que a dissipação mecânica é descrita por derivadas de ordens altas (com ordem ímpar no tempo) que são

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}. \quad (5.2)$$

Aqui nós usamos a simetria de paridade ( $x \mapsto -x$ ) que nos permite ter derivadas de ordem par com respeito à  $x$ . Quando a dissipação é pequena, é possível utilizar a equação da onda para mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \quad (5.3)$$

Isso significa que ambos os termos em (5.2) são equivalentemente dominantes na aproximação. Assim, a equação da onda com a dissipação correspondente pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\gamma \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5.4)$$

onde  $\gamma > 0$  é um pequeno coeficiente de dissipação. A dissipação deste tipo é chamada interna, porque é causada pela deformação espacial (segunda derivada de  $u$  com respeito a  $x$ ). O sinal negativo segue das condições de estabilidade, como mostramos a seguir.

Mostraremos agora a solução geral da equação da onda com dissipação interna. Consideramos a solução complexa da forma

$$u = e^{\lambda t} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

com o autovalor complexo  $\lambda$ . Substituindo essa expressão em (5.4) e cancelando os termos comuns, nós obtemos a equação característica

$$\lambda^2 + 2\gamma k^2 \lambda + a^2 k^2 = 0. \quad (5.6)$$

Suas soluções são

$$\lambda = -\gamma k^2 \pm \sqrt{D}, \quad D = \gamma^2 k^4 - a^2 k^2. \quad (5.7)$$

Nota-se que  $\text{Re } \lambda < 0$  para todos os modos se  $\gamma > 0$ , implicando a estabilidade assintótica do estado de equilíbrio (para  $\gamma < 0$ , o equilíbrio seria instável). Como na seção anterior, a solução



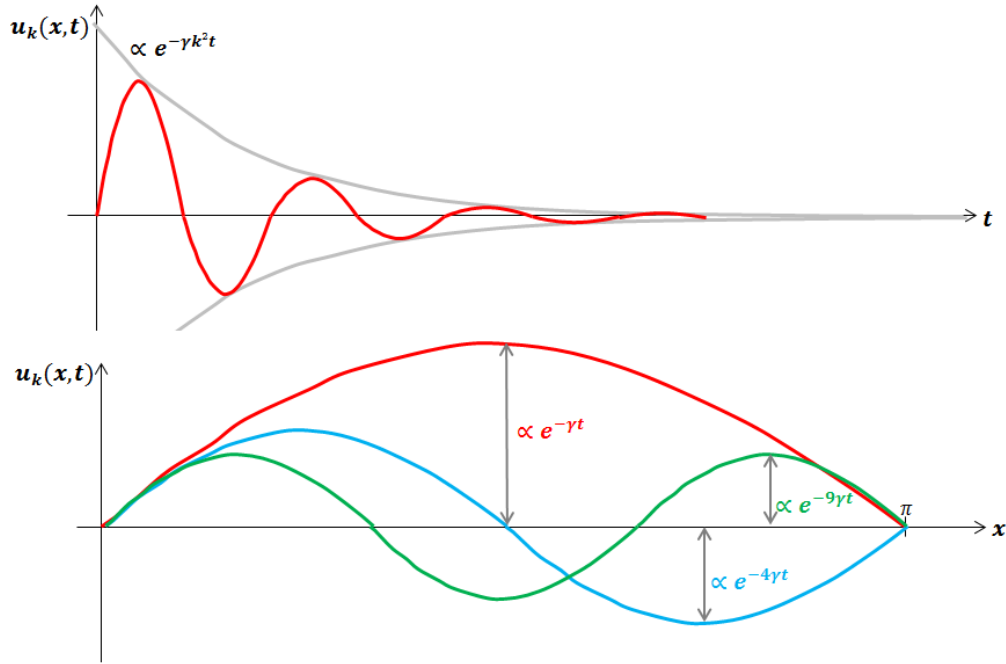


Figura 9: O decaimento das amplitudes de uma corda com dissipação interna para pequenos modos com  $k < a/\gamma$ .

geral é obtida como a combinação linear de todos os modos de vibração com  $k = 1, 2, \dots$  (é preciso pegar a parte real para se ter uma solução real).

O sinal do discriminante de (5.7) depende de  $k$  como

$$D < 0 \text{ se } k < a/\gamma; \quad D > 0 \text{ se } k > a/\gamma. \quad (5.8)$$

Nesses dois casos típicos, temos

- (a) Se  $k < a/\gamma$ , então  $\lambda = -\sigma \pm i\omega \in \mathbb{C}$  com  $\sigma = \gamma k^2 > 0$  e  $\omega = \sqrt{a^2 k^2 - \gamma^2 k^4}$ .
- (b) Se  $k > a/\gamma$ , então ambos  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  são reais e negativos.

Portanto, apenas os primeiros modos com  $k < a/\gamma$  oscilam: a dependência temporal deles é dada pelas partes real e imaginária de  $e^{\lambda t}$ , que são  $e^{\sigma t} \cos \omega t$  e  $e^{\sigma t} \sin \omega t$ , conf. Fig. 9. Uma corda real emite som com as correspondentes frequências  $\omega$ . Sobretons maiores, com  $k > a/\gamma$ , não oscilam de fato, mas decaem exponencialmente com rapidez  $e^{\lambda_{\pm} t}$ .

**Exercício 5.1.** *Faça uma análise similar como a feita com uma corda apenas com dissipação externa (5.1).*

## 6 Efeitos não-lineares

Outra aproximação usada em nossa demonstração da equação da onda na Seção 1.2 está relacionada com a hipótese (H2) de pequenas oscilações. Usamos essa suposição para linearizar a equação. Nessa seção nós despreveremos como um pequeno efeito desses termos negligenciados podem ser levados em conta. Para tanto, vamos escrever a equação da onda como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \quad (6.1)$$

Como vimos na Seção 2, essa representação gera a solução genérica como a soma de duas ondas  $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$  propagando com velocidade  $a$  em sentidos opostos. Separadamente, essas duas soluções ondulatórias  $u(x, t) = f(x - at)$  e  $u(x, t) = g(x + at)$  satisfazem, respectivamente, as duas equações que seguem de (6.1) como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.2)$$

Em nossa análise dos efeitos não-lineares, focaremos apenas na onda  $u(x, t) = f(x - at)$ , que se propaga na direção positiva de  $x$ . Ela satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.3)$$

Termos não-lineares causam pequenas mudanças na forma da onda com o tempo. Tais mudanças na forma da onda podem acumular em intervalos de largas escalas de tempo. Também existe uma pequena interação não linear com a onda  $g(x + at)$  que se propaga no sentido oposto. Essa interação, entretanto, é limitada pelo tempo finito de interação (as duas ondas se cruzam com velocidade relativa  $2a$ ), evitando que tais mudanças acumulem. Esse argumento sugere que dentro da aproximação de primeira ordem, podemos focar na correlação não linear da equação (6.3) apenas, e negligenciar as interações entre as duas equações em (6.2).

### 6.1 Equação de Burgers

Agora podemos decidir a forma do termo não-linear mais significativo na correção da equação (6.3). Assumindo que os termos não-lineares são pequenos, é natural considerar apenas os termos quadráticos em  $u$ . Também, na aproximação de ondas longas, esses termos devem ter o menor número possível de derivadas. Note que o termo  $u^2$  não é permitido, porque qualquer estado constante deve ser um equilíbrio pela hipótese (H1), veja Seção 1.2. Concluímos então que o maior termo não-linear é dado por

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad u\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Usando (6.3), é possível argumentar de forma similar à (5.3) para mostrar que esses dois termos são, de fato, equivalentes perante a aproximação de primeira ordem:

$$u \frac{\partial u}{\partial t} \approx -au \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.5)$$

Somando esses termos à (6.3), obtemos uma equação não-linear para a onda com a correção não-linear mais relevante como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.6)$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro. Perceba que não usamos a simetria de paridade ( $x \mapsto -x$ ), que requeria que todas derivadas fossem de ordem par na Seção 1.2. Isso é porque essa simetria troca as duas equações (6.2) entre si e, portanto, não é uma simetria da equação (6.3) sozinha.

Consideraremos a mudança de coordenadas (para  $\varepsilon > 0$ )

$$\tilde{x} = x - at, \quad \tilde{t} = \varepsilon t, \quad (6.7)$$

que corresponde ao referencial  $\tilde{x}$  que se move com a velocidade da onda  $a$ , e a evolução é observada num tempo mais rápido  $\tilde{t}$ . Usando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} - a \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}. \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.6) temos

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (6.9)$$

Para  $\varepsilon < 0$ , o mesmo resultado por ser obtido pegando  $\tilde{x} = x - at$ ,  $\tilde{t} = |\varepsilon|t$  e  $\tilde{u} = -u$ . Deixaremos de lado agora o acento til (por simplicidade) e obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.10)$$

conhecida como *equação de Burgers* sem viscosidade.

## 6.2 Blowup em tempo finito

Escrevemos (6.10) na forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (6.11)$$

Perceba que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (6.12)$$

representa a derivada total em respeito ao tempo de  $u(x, t)$  no caminho da trajetória dada pela equação  $dx/dt = u$  no plano  $(x, t)$ ; usando a regra da cadeia é possível verificar isso. Como

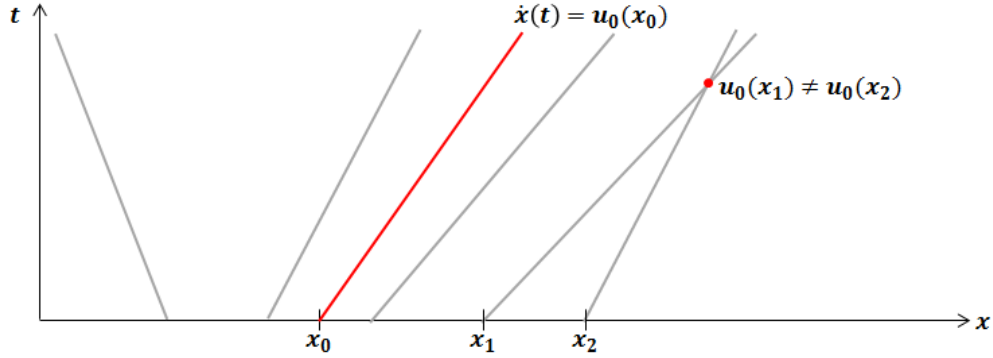


Figura 10: As curvas características da Equação de Burgers sem viscosidade. A intersecção de características correspondentes à valores diferentes de  $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$  implica na ausência de uma solução suave em tempos grandes.

essa derivada em (6.11) é zero, segue então que  $u(x, t)$  não muda ao longo de tal trajetória; Isso significa, portanto, que a trajetória  $dx/dt = u$  é uma reta. Definindo  $u = u_0(x)$  como a condição inicial em  $t = 0$ , então para qualquer  $x_0$ , o valor constante  $u = u_0(x_0)$  se propaga ao longo da reta correspondente (conf. Fig. 10)

$$x = x_0 + u_0(x_0)t. \quad (6.13)$$

Analogamente à análise feita na Seção 2, chamamos essas retas de *características*.

Podemos resumir nossos resultados como um sistema de duas equações

$$x = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u = u_0(x_0). \quad (6.14)$$

Aqui  $u_0(x)$  é a condição inicial em  $t = 0$  e  $x_0$  é usada como variável auxiliar. Essas duas equações fornecem uma solução implícita  $u(x, t)$  do problema de Cauchy para a equação de Burgers. A Fig. 11 mostra a evolução de uma única onda conforme a equação Burgers. De acordo com (6.13), cada valor de condição inicial  $u_0(x)$  se propaga com velocidade constante  $u_0(x)$ . Isso significa que valores maiores se propagam com velocidades maiores, o que gera uma inclinação gradual da forma da onda para a direita. Note que esse comportamento deve gerar eventualmente (num tempo finito) uma singularidade. Isso já é evidente do fato de que retas características diferentes começando do lado direito da onda se intersectam, enquanto elas carregam valores diferentes da variável dependente  $u$ , veja ambas figuras 10 e 11. Essa singularidade é chamada de um blowup em tempo finito.

Agora vamos encontrar o tempo exato de blowup. Como é possível inferir da Fig. 11, as derivadas  $\partial u / \partial x$  tornam-se infinitas no tempo de blowup. Para calcular essa derivada, usaremos a representação  $u = u_0(x_0)$  como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_0(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial x}. \quad (6.15)$$

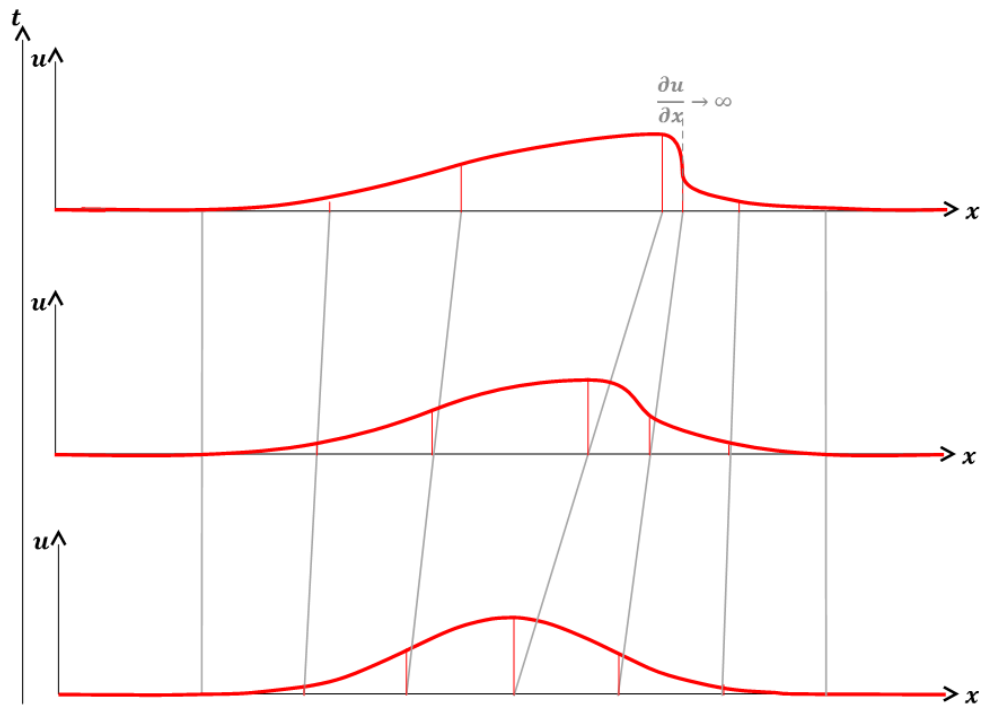


Figura 11: Evolução da onda  $u(x, t)$  pela equação de Burgers sem viscosidade em diferentes tempos: tempo inicial  $t = 0$ , tempo intermediário  $t_1$ , e o tempo de blowup  $t_{blowup}$ . As linhas cinzas ao fundo mostram as características no plano  $(x, t)$ . A forma da onda fica cada vez mais inclinada à direita até o blowup se formar: uma derivada de valor infinito em um ponto.

onde nós consideramos a variável auxiliar  $x_0$  como uma função de  $x$  num instante fixo. As derivadas  $\partial x_0/\partial x$  podem ser obtidas da primeira relação em (6.14) como

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + u'_0(x_0)t}. \quad (6.16)$$

Combinando (6.15) e (6.16), temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u'_0(x_0)}{1 + u'_0(x_0)t}. \quad (6.17)$$

Agora vemos explicitamente que, se a condição inicial tem  $u'_0 < 0$  para algum  $x_0$ , então a derivada  $\partial u/\partial x \rightarrow \infty$  explode ao longo da característica correspondente num tempo  $t = -1/u'_0(x_0) > 0$ . O tempo de blowup corresponde ao menor desses tempos (o que ocorre primeiro):

$$t_{blowup} = \min_{u'_0 < 0} \left[ \frac{1}{-u'_0(x_0)} \right], \quad (6.18)$$

onde o mínimo é tomado sobre todos os valores  $x_0$  que correspondem à  $u'_0$  negativos.

Para a interpretação de nossos resultados, relembremos que a equação de Burgers sem viscosidade descreve a lenta evolução da forma da onda num referencial que se move com velocidade  $a$ , conf. (6.7). O resultado mostra que, devido aos termos não-lineares, a forma da onda fica cada vez mais inclinada com o passar do tempo na região onde é decrescente e cada vez menos inclinada na região em que é crescente. Isso corresponde ao caso de  $\varepsilon > 0$  e veríamos essa tendência ao contrário no caso de  $\varepsilon < 0$ . Apesar da equação de Burgers gerar um tempo de blowup finito com inclinação infinita, tal comportamento não é uma propriedade observada em todos os sistemas. Na verdade, essa equação não é mais válida quando a inclinação se torna acentuada, porque a hipótese de ondas longas e mudanças suaves de  $u(x, t)$  é violada. Apesar disso, muitos sistemas de fato desenvolvem algo similar ao blowup que descrevemos acima: por exemplo, o blowup é típico na dinâmica de gases, em que é o ponto inicial de uma onda de choque. Podemos mencionar também o blowup como o começo de um engarrafamento em modelos de transporte.

## 7 Dispersão; velocidade de fase e de grupo

Nessa seção, vamos afrouxar a suposição da aproximação de ondas longas, isso é, a hipótese (H6) da Seção 1.2. Essa afirmação foi usada para indentificar os termos mais relevantes como os termos com o menor número de derivadas. Quando as ondas não são mais longas, derivadas de todas as ordens atuam, o que significa que a equação de movimento tem a forma geral (1.12) com mais as condições (1.13) e (1.14) devido às simetrias. As soluções dessa equação podem ser encontradas na forma

$$u = e^{i(kx - \omega t)}, \quad (7.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência e  $k$  é chamado número de onda. Como a derivada de ordem par com respeito a  $x$  gera um fator  $(ik)^n = (-k^2)^{n/2}$  e a derivada de ordem par com respeito a  $t$  gera um fator  $(-i\omega)^m = (-\omega^2)^{m/2}$ , a equação de movimento se reduz à uma relação  $F(k^2, \omega^2) = 0$  para alguma função-não linear  $F$ . Assumiremos que essa equação pode ser explicitamente resolvida para  $\omega^2$  da forma

$$\omega^2 = f(k^2). \quad (7.2)$$

Como ambos  $k$  e  $\omega$  podem ser tomados com diferentes sinais, temos quatro soluções para cada valor  $k > 0$  real da forma

$$e^{i(kx-\omega t)}, \quad e^{i(kx+\omega t)}, \quad e^{i(-kx-\omega t)}, \quad e^{i(-kx+\omega t)}, \quad (7.3)$$

onde

$$\omega = \omega(k) = \sqrt{f(k^2)}. \quad (7.4)$$

É possível inferir da (7.3) que  $\omega$  deve ser um número real, caso contrário algumas soluções cresceriam exponencialmente com o tempo. Isso significa que  $f(k^2)$  deve ser real e não-negativa para poder satisfazer os requisitos de estabilidade. Quando ambos  $k$  e  $\omega$  são reais, as quatro soluções reais podem ser dadas pelas partes real e imaginária de (7.3), que são

$$\cos(kx - \omega t), \quad \sin(kx - \omega t), \quad \cos(kx + \omega t), \quad \sin(kx + \omega t). \quad (7.5)$$

Essas funções são as ondas senoidais movendo-se com velocidade constante  $dx/dt = \pm v_f$ , onde

$$v_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (7.6)$$

é chamada de *velocidade de fase* do número de onda  $k$ .

Note que  $f(0) = 0$  é necessário de (1.13). A aproximação de onda longa corresponde à  $k \rightarrow 0$ , quando  $e^{ikx}$  muda lentamente no espaço. Nessa aproximação, a equação de onda (1.20) gera  $\omega^2 \approx a^2 k^2$ . Essas duas propriedades podem ser resumidas (veja Fig. 12)

$$\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = a. \quad (7.7)$$

O desvio da função  $\omega(k)$  da forma linear  $ak$  é chamado de *dispersão*, e  $\omega = \omega(k)$  é chamado de *relação de dispersão*.

## 7.1 Velocidade de grupo

Para ver os efeitos de dispersão, vamos considerar a solução como combinação de dois modos com números de onda diferentes  $k_1$  e  $k_2$ :

$$\begin{aligned} u &= \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

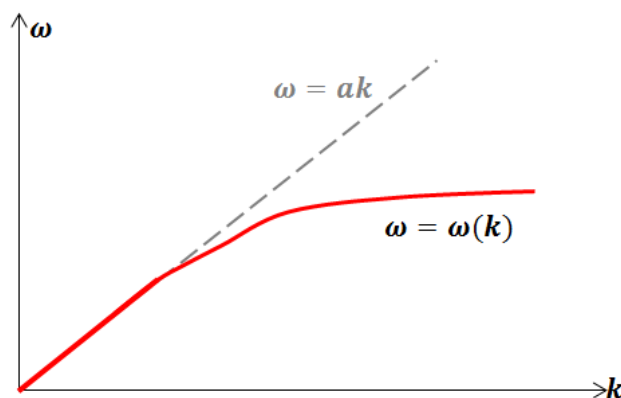


Figura 12: Relação de dispersão.

Vamos agora assumir que  $k_1$  e  $k_2$  estão muito próximos, tal como (7.8) é a superposição de dois modos quase idênticos. Então podemos escrever  $k_1 = k - \delta$  e  $k_2 = k + \delta$  com  $\delta \ll k$ . Portanto,

$$\omega_1 = \omega(k_1) = \omega(k - \delta) = \omega(k) - \frac{d\omega}{dk}\delta + o(\delta), \quad (7.9)$$

$$\omega_2 = \omega(k_2) = \omega(k + \delta) = \omega(k) + \frac{d\omega}{dk}\delta + o(\delta). \quad (7.10)$$

Substituindo em (7.8), temos

$$\begin{aligned} u &= 2 \cos [kx - \omega(k)t + o(\delta)] \cos \left[ \delta x - \frac{d\omega}{dk}\delta t + o(\delta) \right] \\ &\approx 2 \cos [kx - \omega(k)t] \cos \left[ \delta \left( x - \frac{d\omega}{dk}t \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Apresentando

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} \quad (7.12)$$

chamada de *velocidade de grupo*, escrevemos

$$u \approx 2 \cos [k(x - v_f t)] \cos [\delta(x - v_g t)]. \quad (7.13)$$

Essa solução é mostrada na Fig. 13: ela representa a combinação de dois tipos de dinâmicas. Na escala menor, as oscilações rápidas se propagam com a velocidade de fase  $v_f$  (essa é a velocidade de cada máximo e mínimo). Na escala maior, o envelope do sinal como um todo (uma lenta modulação da amplitude da onda) se propaga com a velocidade de grupo  $v_g$ . A manifestação da dispersão no sistema é a diferença entre as velocidades de fase e de grupo. É importante entender que o sinal enviado de um certo ponto se propaga com a velocidade de grupo, e que a velocidade de grupo pode ser muito diferente da velocidade de fase (elas podem inclusive ter sinais opostos).



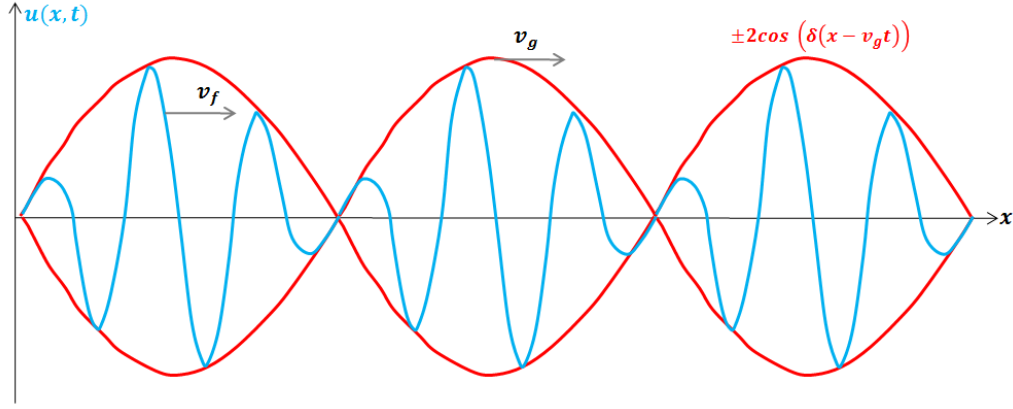


Figura 13: Dinâmica para a combinação de duas ondas senoidais.

## 7.2 Pacote de onda

Uma expressão mais geral para uma solução como pacote de onda (uma onda com frequência quase constante  $\omega \approx \omega_0$  e número de onda  $k \approx k_0$ , mas de amplitude lentamente modulada) pode ser representada como

$$u(x, t) = \text{Re} \int c(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (7.14)$$

Onde  $c(k)$  é uma função complexa concentrada em uma pequena vizinhança de distância  $\delta$  de  $k_0$ , veja Fig. 14. Essa expressão é a combinação linear de modos, todos os quais têm frequências e números de onda muito similares. Nesse caso temos  $k = k_0 + \delta$  e

$$\omega(k) = \omega(k_0 + \delta) \approx \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \delta = \omega_0 + v_g \delta \quad (7.15)$$

para pequenos  $\delta$ .

A afirmação de que  $c(k)$  é concentrada numa pequena vizinhança de  $k_0$  nos permite usar (7.15) na forma integral (7.14). Em  $t = 0$ , essa integral se torna

$$t = 0 : \quad u(x) = \text{Re} \int c(k_0 + \delta) e^{i(k_0 + \delta)x} d\delta = \text{Re} \left[ e^{ik_0 x} \int c(k_0 + \delta) e^{i\delta x} d\delta \right]. \quad (7.16)$$

Vamos definir as funções reais  $g(x)$  e  $\varphi(x)$  (valor absoluto e fase) como

$$g(x) e^{i\varphi(x)} = \int c(k_0 + \delta) e^{i\delta x} d\delta. \quad (7.17)$$

Então escrevemos (7.16) como

$$t = 0 : \quad u(x) = g(x) \cos [k_0 x + \varphi(x)]. \quad (7.18)$$

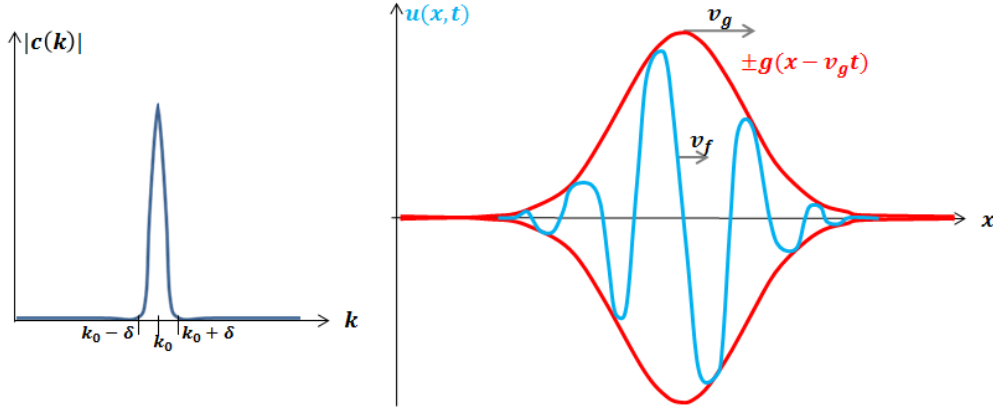


Figura 14: Dinâmicas de um pacote de onda genérico.

É importante ver que a integral (7.17) depende de  $x$  através das combinações  $\delta x$ , com  $\delta$  pequeno. Isso significa que as funções  $g(x)$  e  $\varphi(x)$  dependem de  $x$  bem lentamente, comparada com a rápida oscilação do termo devido ao  $k_0 x$  em (7.18). Essa função  $g(x)$  representa o envelope da onda e  $\varphi(x)$  determina uma lenta mudança de fase, veja Fig. 14.

Uma demonstração similar pode ser feita para um tempo  $t$  arbitrário. Nesse caso, usando (7.15) em (7.14), teremos

$$u \approx \text{Re} \left[ e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int c(k_0 + \delta) e^{i\delta(x - v_g t)} d\delta \right]. \quad (7.19)$$

Usando a definição (7.17), escrevemos

$$u \approx g(x - v_g t) \cos [k_0(x - v_f t) + \varphi(x - v_g t)]. \quad (7.20)$$

É possível perceber que a solução tem forma localmente senoidal, viajando com velocidade de fase  $v_f$ . Entretanto, a amplitude (envelope) da onda é dada por  $g(x - v_g t)$  e viaja com a velocidade de grupo  $v_g$ , diferente da de fase. Veja Fig. 14.

## 8 Ondas Kelvin wake

Ondas na superfície de águas profundas (quando o comprimento de onda  $\ell$  é pequeno comparado com a profundidade  $H$ ) é um exemplo de um meio fortemente dispersivo. A relação de dispersão é da forma

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad \ell = \frac{2\pi}{k} \ll H, \quad (8.1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Relembramos que  $\omega \approx k\sqrt{gH}$  para águas rasas (ondas longas,  $\ell \gg H$ ), como mencionado na Seção 1.3. De (8.1) obtemos

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (8.2)$$



Figura 15: Rastro do barco. Foto de [http://www.wikiwaves.org/Ship\\_Kelvin\\_Wake](http://www.wikiwaves.org/Ship_Kelvin_Wake).

Isso gera a seguinte relação

$$v_f = 2v_g, \quad (8.3)$$

mostrando que em águas profundas, a fase (a crista das ondas) se propagam com o dobro da velocidade do envelope da onda.

Nessa seção, iremos descrever geometricamente as ondas geradas por um barco que se move com velocidade constante  $v$  em linha reta, Fig. 15. Nossa demonstração será baseada em duas simples hipóteses. Na primeira assumiremos que o padrão das ondas é estacionário no referencial do barco, isso é, uma pessoa dentro do barco enxerga uma onda estacionária em todos os pontos. Para a segunda hipótese, assumiremos que o padrão é ondas é autossimilar. Isso significa que o ângulo das cristas das ondas e os comprimentos de onda são os mesmos ao longo de qualquer reta que comece no barco, veja Fig. 15.

O padrão das ondas vistas de longe do barco podem ser compreendidos a partir da relação de dispersão. A crista da onda se propaga com velocidade de fase  $v_f(k)$ . Essa velocidade é constante em todos os pontos de uma linha reta que passa pelo barco com um ângulo  $\psi$ , devido a autossimilaridade. Ao mesmo tempo, toda a estrutura da onda (envelope) correspondente às ondas com um dado número de onda  $k$  se propaga com metade da velocidade de grupo  $v_g$ . Pela autossimilaridade, as ondas de um dado  $k$  devem permanecer na mesma reta de ângulo  $\psi$ . Essas propriedades estão resumidas na Fig. 16, que mostra a dinâmica das cristas de onda em tempos  $t$  e  $t + dt$  próximos entre si. Aqui nós denotamos por  $\theta$  o ângulo dessas cristas de onda ao longo dessas retas. Pela suposição de autossimilaridade,  $\theta$  é constante ao longo de uma reta e não depende do tempo, mas sim depende de  $\psi$ .

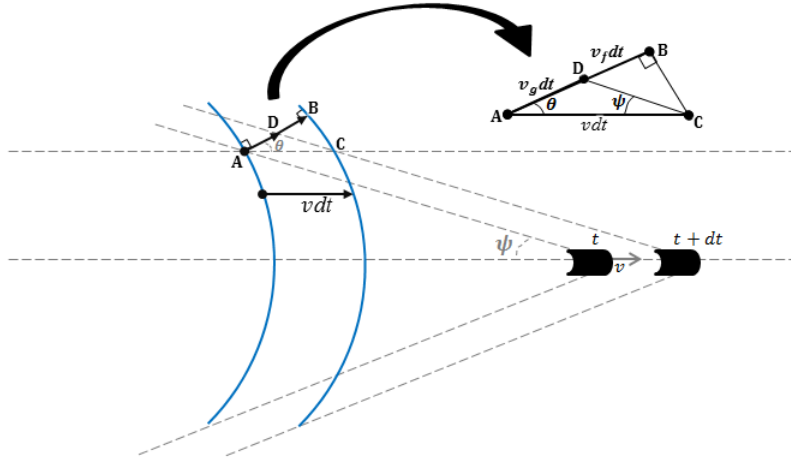


Figura 16: O triângulo formado na propagação das cristas da onda (mostradas em azul). A velocidade de fase  $v_f$  determina a velocidade das cristas. A velocidade de grupo  $v_g$  corresponde ao movimento do padrão formado (o envelope), isto é, o movimento da região de um número de onda específico.

O triângulo da Fig. 16 temos os seguintes lados

$$AC = v dt, \quad AB = v_f dt, \quad AD = v_g dt. \quad (8.4)$$

Como no ponto  $B$  temos um ângulo reto, as relações trigonométricas fornecem

$$v_f = v \cos \theta. \quad (8.5)$$

Além do mais, para o triângulo  $ADC$ , podemos usar a Lei dos senos:

$$\frac{\sin(\pi - \theta - \psi)}{AC} = \frac{\sin \psi}{AD}. \quad (8.6)$$

Podemos expressar  $AD$  e  $AC$  de (8.7), (8.5) e (8.3) como

$$AC = v dt, \quad AD = v_g dt = \frac{v_f}{2} dt = \frac{v \cos \theta}{2} dt. \quad (8.7)$$

Substituindo dentro de (8.6), a velocidade do barco  $v$  se cancela e obtemos

$$\sin(\pi - \psi - \theta) = \frac{2 \sin \psi}{\cos \theta}. \quad (8.8)$$

Depois de alguma manipulação simples, temos

$$\cos \psi \sin \theta + \sin \psi \cos \theta = \frac{2 \sin \psi}{\cos \theta}. \quad (8.9)$$

Multiplicando por  $\cos \theta / \cos \psi$ , gera

$$\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \tan \psi = 2 \tan \psi. \quad (8.10)$$

Por fim, resolvendo para  $\tan \psi$ , concluímos

$$\tan \psi = f(\theta), \quad f(\theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{2 - \cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta}. \quad (8.11)$$

A função  $f(\theta)$  é traçada na Fig. 17. A solução da equação (8.11) existe para  $|\theta| < \theta_*$  com  $\theta_* = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35.26^\circ$  e o valor limite  $\psi_* = \arctan 2^{-3/2} \approx 19.47^\circ$ . Isso significa que o rastro do barco está confinado dentro dos ângulos  $-\psi_* \leq \psi \leq \psi_*$ . Nesse intervalo (exceto pelas extremidades), a equação (8.11) tem duas soluções,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , que corresponde à duas famílias de ondas. Para cada família, a solução correspondente determina o ângulo das cristas de onda. A distribuição desses ângulos está desenhada no lado esquerdo da Fig. 18; lembre que esses ângulos não mudam ao longo de cada uma das retas que passa pelo barco devido à autossimilaridade. As cristas das ondas são as linhas, que formam um ângulo específico em cada ponto. Isso define dois tipos de ondas mostradas em vermelho e azul na Fig. 18. Essas duas famílias de ondas atrás do barco podem ser reconhecidas na fotografia da Fig. 15.

## 9 Equação de KdV

Nas seções prévias, consideraremos várias correções da equação da onda. Existem dissipação, não-linearidades e dispersão. Até agora nós consideramos esses efeitos separadamente. Nessa seção, vamos considerar o efeito combinado da não-linearidade e dispersão, que gera um novo fenômeno: a onda solitária.

Começamos com a equação (6.6) para a onda que se move na direção positiva de  $x$ , onde o mais significativo termo não-linear já está incluso:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (9.1)$$

Ainda resta determinar como adicionar os efeitos de dispersão. Como mostrado na Seção 7, a dispersão é introduzida por termos lineares com derivadas de altas ordens. Para ondas longas, os termos dispersivos mais importantes são aqueles com o menor número de derivadas. Para selecionar esses termos corretamente, nós precisamos dos argumentos de simetria. Nós já mencionamos que a equação para uma onda única (6.3) não é simétrica com relação à paridade, nem é temporalmente reversível, porque mudar o sinal de  $x$  ou  $t$  trocam as duas equações (6.2) entre si: a onda muda seu sentido de propagação. Entretanto, a combinação das simetrias de paridade e tempo é conservada: mudando o sinal de ambas as variáveis tempo e espaço juntas ( $x \mapsto -x$ ,  $t \mapsto -t$ ), a propagação da onda é retomada e, portanto, a equação deve permanecer intacta.

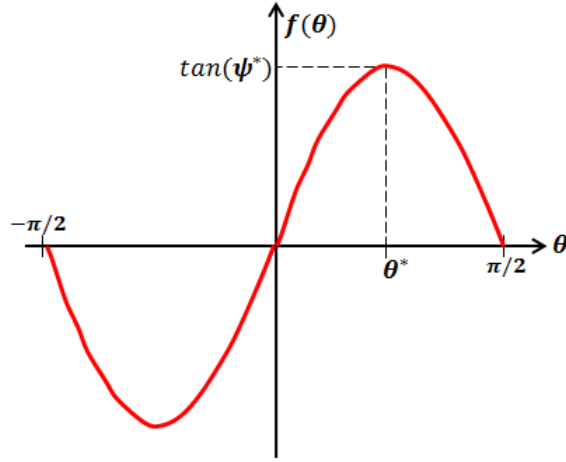


Figura 17: A função  $f(\theta)$  da equação  $\tan \psi = f(\theta)$ .

É agora fácil de ver que os termos de correção para a equação (9.1) devem conter um número ímpar de derivadas total. Nessa caso a equação se torna invariante perante as mudanças  $x \mapsto -x$ ,  $t \mapsto -t$ , porque todos os termos mudam de sinal ao mesmo tempo. Esse critério seleciona os termos dispersivos mais significativos na forma de

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}. \quad (9.2)$$

Como antes, veja o exemplo (6.5), é fácil mostrar que todos os termos em (9.2) são equivalentes na aproximação de primeira ordem. Portanto, para capturar o efeito geral de uma pequena dispersão, é suficiente considerar apenas um termo a mais  $\partial^3 u / \partial x^3$  em (9.1). Isso gera

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (9.3)$$

onde ambas as pequenas não-linearidades (descritas com um pequeno coeficiente  $\varepsilon_1$ ) e uma pequena dispersão (descrita por um pequeno coeficiente  $\varepsilon_2$ ) são levados em conta.

Consideramos a mudança de coordenadas

$$\tilde{x} = x - at, \quad (9.4)$$

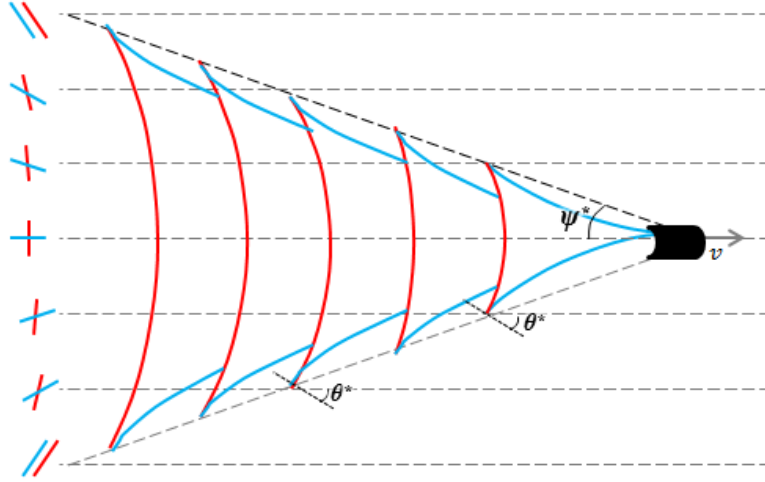


Figura 18: Análise geométrica das ondas do rastro do barco.

que corresponde ao sistema de referencial  $\tilde{x}$  que se move com velocidade  $a$ . Então a equação (9.3) se reduz para

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_1 u \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_2 \frac{\partial^3 u}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \quad (9.5)$$

No próximo passo, reescalamos as variáveis de estado como

$$\tilde{x} = \sqrt[3]{\varepsilon_2} \xi, \quad u = \frac{6\sqrt[3]{\varepsilon_2}}{\varepsilon_1} w. \quad (9.6)$$

Nas novas variáveis, a equação (9.5) se torna

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 6w \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (9.7)$$

e esta é chamada de *Equação de Kortweg – de Vries (KdV)*.

## 10 Sóliton

Nessa seção, descreveremos a solução de uma onda viajante da equação de KdV, que é chamada de sóliton. Lembre-se de que a equação da onda tem soluções de ondas viajantes com uma forma qualquer, mas velocidade fixa  $a$ . Por outro lado, a equação KdV tem uma solução de onda viajante de diferentes velocidades, mas o formato da onda não é mais arbitrário.

Consideramos a solução da forma

$$w(\xi, t) = W(\xi - vt), \quad (10.1)$$

representando a onda viajante com uma velocidade desconhecida  $v$ . Podemos agora definir uma variável viajante  $\eta = \xi - vt$ . Nesse caso, a solução é dada simplesmente pela função  $W(\eta)$ . A derivada, pela regra da cadeia, se torna

$$\frac{\partial w}{\partial t} = W'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = -vW'(\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = W'(\eta), \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = W'''(\eta), \quad (10.2)$$

onde a linha indica a derivada com respeito a variável  $\eta$ . Substituindo em (9.7), obtemos

$$(-vW + W'' + 3W^2)' = 0. \quad (10.3)$$

Integrando com respeito a  $\eta$  gera

$$W'' = -3W^2 + vW + \gamma \quad (10.4)$$

com a constante de integração  $\gamma$ . Uma onda solitária satisfaz a condição

$$W \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (10.5)$$

Isso significa que  $W = 0$  é um equilíbrio no sistema (10.4), especificando a constante de integração  $\gamma = 0$ . O resultado da equação mostra-se

$$W'' = -3W^2 + vW. \quad (10.6)$$

A equação (10.6) pode ser escrita como

$$W'' = -\frac{dU}{dW}, \quad U(W) = W^3 - \frac{v}{2} W^2. \quad (10.7)$$

É possível mencionar a analogia direta desta equação e da equação de movimento para um ponto material na reta  $x \in \mathbb{R}$  sobre uma força com energia potencial  $U(x)$ . Tal sistema é governado pela equação

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}, \quad (10.8)$$

e a equação (10.7) segue da substituição de  $x \mapsto W$  e  $m = 1$ .

A Figura 19 mostra que a forma de energia potencial  $U(W)$  e do retrato de fase para a equação (10.7) no caso (a)  $v > 0$  e (b)  $v < 0$ . Do retrato de fase fica claro que a onda não pode ter velocidade negativa  $v$ : nesse caso apenas a solução trivial  $W \equiv 0$  satisfaz as condições (10.5). A onda solitária que satisfaz as condições (10.5) deve ser a separatriz do caso  $v > 0$ : uma órbita que começa e termina num ponto de equilíbrio instável  $W = 0$ . Em particular, nós vemos que  $W > 0$  em todos os pontos da forma da onda.

Usando a seguinte solução podemos encontrar uma solução explícita

$$\frac{(W')^2}{2} + U(W) = 0, \quad (10.9)$$



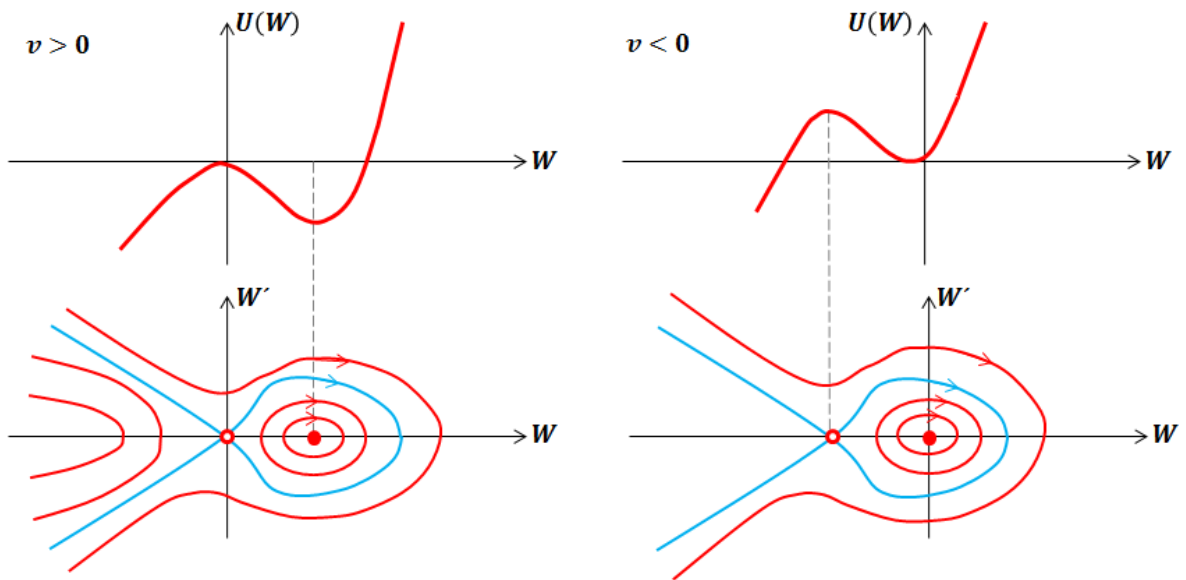


Figura 19: O potencial  $U(W)$  e o retrato de fase para a equação (10.6). (a) O caso  $v > 0$ , quando o sistema tem um ponto de equilíbrio instável para  $W = 0$ . A solução do sóliton é definida pela separatriz (órbita homoclínica) que começa e termina na origem (a curva azul da direita). Órbitas periódicas correspondem à soluções ondulatórias periódicas. (b) O caso  $v < 0$ : não existem soluções não triviais começando e terminando da origem.



Figura 20: O sóliton para a equação de KdV.

que tem papel análogo à energia para sistemas (10.8). A equação (10.9) pode ser verificada calculando a derivada com (10.7). Resolvendo para  $W'$ , temos

$$\frac{dW}{d\eta} = \pm \sqrt{vW^2 - 2W^3} = \pm \sqrt{v}W \sqrt{1 - 2W/v}. \quad (10.10)$$

Escrevendo essa equação como

$$\sqrt{v} d\eta = \pm \frac{dW}{W \sqrt{1 - 2W/v}} \quad (10.11)$$

e integrando, temos

$$\sqrt{v}(\eta - \eta_0) = \pm \int \frac{dW}{W \sqrt{1 - 2W/v}}. \quad (10.12)$$

Usando a mudança de variáveis  $z = 2W/v$ , escrevemos

$$\sqrt{v}(\eta - \eta_0) = \pm \int \frac{dz}{z \sqrt{1 - z}} = \mp 2 \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{z}}. \quad (10.13)$$

Explicitando  $z$  dessa relação, ficamos com

$$z = \cosh^{-2} \left[ \frac{\sqrt{v}}{2} (\eta - \eta_0) \right]. \quad (10.14)$$

Usando a expressão  $W = vz/2$ , temos

$$w(\xi, t) = W(\xi - vt) = \frac{v}{2} \cosh^{-2} \left[ \frac{\sqrt{v}}{2} (\xi - vt - \eta_0) \right]. \quad (10.15)$$

Essa solução representa uma onda chamada de *sóliton*. Ela se move com velocidade constante  $v > 0$ , conf. Fig. 20. Essas ondas têm a mesma forma para todas as velocidades, porém com comprimentos de onda e amplitudes que dependem dela.

Note que o retrato de fase da Fig. 19 contém outro tipo de solução fechada: órbitas periódicas. Essas órbitas correspondem às ondas periódicas apresentadas em Fig. 21. A forma de uma onda depende do valor constante (a “energia”)

$$\frac{(W')^2}{2} + U(W) = E = \text{const} < 0. \quad (10.16)$$

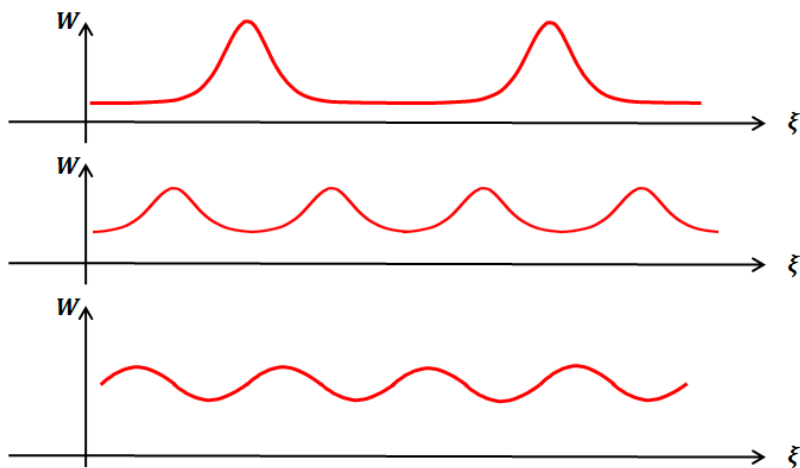


Figura 21: Ondas periódicas (senoidais) na equação de KdV.

Quando  $E$  está perto de zero, a onda periódica lembra um sóliton, repetido periodicamente em algum intervalo. Quando  $E$  fica mais perto do mínimo de  $U(W)$ , a onda é quase senoidal como sólitons perto do equilíbrio estável (centro).

Como uma aplicação, é possível pensar nas ondas do mar. Perto da praia, os termos de dispersão ficam fracos (lembra-se que para águas rasas a equação tem pequena dispersão). Ao mesmo tempo, se as ondas não são altas, termos não-lineares são pequenos. Isso nos trás para o campo de aplicação da equação de KdV: é possível ver claramente a estrutura de ondas intervaladas entre o mar profundo e a praia semelhantes aos perfis mostrados na Fig 21. Quando a onda chega muito perto da praia, as não-linearidades se tornam grandes, enquanto a dispersão se torna cada vez mais desprezível. Isso gera a inclinação das ondas em direção a praia, como descrito pela equação de Burgers sem viscosidade na Seção 6.2. Por fim, quando ondas altas se tornam de tamanho comparável com a profundidade do mar, as não-linearidades são pequenas e um sofisticado processo de quebra da onda acontece.