

УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.42

ВЛИЯНИЕ МЕСТА КРЕПЛЕНИЯ ПОДКОСА НА АЭРОУПРУГУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОГО КРЫЛА

А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян

Исследуется влияние подкоса на аэроупругую устойчивость прямого крыла. Ставится задача нахождения координаты точки крепления подкоса (по хорде и по размаху), при которой критическая скорость потери устойчивости достигает максимума.

Дано определение критической скорости с учетом погрешности параметров, и задача оптимизации сформулирована с учетом нового определения. Выведены формулы для производных от собственных значений по параметрам. Найдены оптимальные решения. Приведено сравнение критических скоростей, соответствующих оптимальным решениям, найденным традиционным и новым методами.

Рассматривается задача об аэроупругой устойчивости прямого крыла большого удлинения с подкосом. Подкос представляет собой абсолютно жесткий стержень, соединяющий крыло с фюзеляжем, рис. 1. Наличие подкоса означает неподвижность т. P — точки крыла относительно фюзеляжа и приводит к дополнительным краевым условиям. Аэродинамическое воздействие на крыло определяется на основании гипотезы стационарности.

Эта задача впервые была поставлена М. В. Келдышем [1]. В результате расчетов с использованием одночленного приближения по

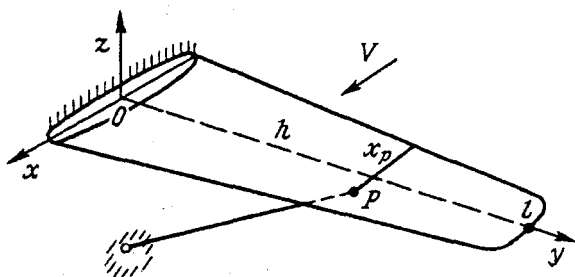


Рис. 1

Бубнову — Галеркину для конкретного крыла с подкосом, укрепленным на оси жесткости, он сделал вывод, что «примерно около $h = 0,47l$ критическая скорость становится мнимой и, следовательно, при $h > 0,47l$ вибрации крыла с подкосом становятся невозможными» (здесь h — расстояние от основания крыла до т. P , l — полуразмах крыла). Аналогичный вывод был сделан М. В. Келдышем [1] и для случая двух подкосов, подкрепляющих сечение крыла: «при $h > 0,8l$ крыло становится невибрирующим». Однако эти выводы не подтверждаются при увеличении числа членов в методе Бубнова — Галеркина. Оказывается [2], что при $h > 0,47l$ (соответственно при $h > 0,8l$ для случая двух подкосов) флаттер не исчезает, но изменяется тон колебаний, по которому происходит потеря устойчивости.

В настоящей работе исследуется влияние места крепления подкоса, определяемого расстоянием h от основания крыла и расстоянием x_p от передней кромки крыла до т. P , на аэроупругую устойчивость крыла и ставится задача нахождения оптимального положения подкоса, при котором критическая скорость потери устойчивости будет максимальной. Задача устойчивости сводится к изучению поведения собственных значений λ на комплексной плоскости для линейаризованных уравнений движения крыла в зависимости от скорости потока V при различных значениях параметров h и x_p . Таким образом, определяются критические скорости колебательного (флаттер) и статического (дивергенция) типов потери устойчивости и в пространстве параметров h , x_p и V находятся области устойчивости, флаттера и дивергенции. Оказывается, что область устойчивости имеет узкие части, глубоко вклинивающиеся в область неустойчивости (флаттера и дивергенции). Поскольку оптимальные критические скорости находятся на границах именно таких частей, то интересно исследовать, как может измениться критическая скорость, если параметры системы заданы с некоторыми погрешностями, и не могут ли небольшие погрешности привести к резкому ее падению (негрубость критической скорости).

В работе изучается влияние погрешностей определения параметров задачи (жесткостей, масс и т. д.) на устойчивость крыла и предлагается метод расчета критической скорости с их учетом. Дается вывод производных от собственных значений по параметрам с использованием собственных векторов прямой и транспонированной задач на собственные значения. Эти производные используются при расчетах. Сравниваются значения критической скорости, полученные с учетом и без учета погрешностей параметров.

Численные расчеты проводились с помощью метода Бубнова — Галеркина. Основной трудностью, возникающей при этом, является выбор системы вектор-функций (точнее, пар функций), каждая из которых должна удовлетворять двенадцати граничным условиям задачи. В настоящей статье предложен метод нахождения любого количества таких пар функций. Исследовалась практическая сходимость метода при увеличении числа членов в разложении.

В результате расчетов для конкретного крыла найдены два оптимальных положения подкоса: при $h = 0,61l$, $x_p = 0,325b$ и при $h = 0,9l$, $x_p = 0,25b$ (b — хорда крыла), соответствующих значениям критической скорости 117 м/с и 116 м/с. Заметим, что критическая скорость крыла без подкоса составляет 30 м/с. При учете погрешностей параметров модели (для конкретного случая) получено, что оптимальными положениями подкоса являются $h = 0,61l$, $x_p = 0,3b$ и $h = 0,9l$, $x_p = 0,05b$ с критическими скоростями 71 м/с и 76 м/с соответственно.

1. Основные соотношения. Рассмотрим колебания тонкого крыла большого удлинения, подкрепленного подкосом в т. P , в несжимаемом воздушном потоке, рис. 1. Крыло моделируется упругой балкой, работающей на кручение и изгиб и имеющей прямую упругую ось Oy (ось жесткости), перпендикулярную фюзеляжу. Деформация крыла характеризуется прогибом $w(y, t)$ и углом поворота относительно упругой оси $\theta(y, t)$, где t — время. Линеаризованные уравнения движения крыла в потоке имеют вид [3], [4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= L_a; \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - m\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= M_a. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

В этих уравнениях EI и GJ — жесткости крыла на изгиб и кручение, m и I_m — масса и момент инерции относительно упругой оси, приходящиеся на единицу размаха, σ — расстояние от центра жесткости до центра тяжести сечения. Аэродинамические сила L_a и момент M_a на единицу размаха определяются на основании гипотезы стационарности [3], [4], согласно которой аэродинамические характеристики крыла заменяются в каждый момент времени характеристиками того же крыла, движущегося с постоянными линейной и угловой скоростями, равными скоростям действительного движения. Выражения для L_a и M_a записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} L_a &= c_y^\alpha \rho V^2 b \left[\theta + \frac{b}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right]; \\ M_a &= c_m^\alpha \rho V^2 b^2 \left[\theta + \frac{b}{V} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16 c_m^\alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где b — хорда крыла, x_0 — расстояние от передней кромки до упругой оси, V — скорость потока. Теоретические значения аэродинамических коэффициентов c_y^α и c_m^α для тонкого крыла бесконечного размаха составляют соответственно $c_y^\alpha = \pi$, $c_m^\alpha = \pi \left(\frac{x_0}{b} - \frac{1}{4} \right)$ [3], [4].

Рассматривая случай жесткого крепления крыла к фюзеляжу, выпишем граничные условия, наложенные на функции w и θ при $y = 0$ (жесткое защемление) и при $y = 1$ (свободный край):

$$\left. \begin{aligned} y = 0: w = \frac{\partial w}{\partial y} = \theta = 0; \\ y = 1: EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

При $y = h$ (сечение, в котором закреплен подкос) выполняются условия непрерывности функций w и θ , неподвижности т. P относительно фюзеляжа, отсутствия излома функции прогиба, непрерывности изгибающего момента и условие на крутящий момент $M + \delta N = 0$, где M — приращение крутящего момента в сечении (h), N — сила реакции подкоса, равная приращению перерезывающей силы, δ — расстояние от оси жесткости до т. P . В результате имеем [1]:

$$\left. \begin{aligned} w_- = w_+, \quad \theta_- = \theta_+, \quad w_- - \delta \theta_- = 0; \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_- = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_+, \quad \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_- = \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_+; \\ \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \delta \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right)_- = \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \delta \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right)_+. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Здесь «-» и «+» означают пределы величин при $y \rightarrow h$ справа и слева от сечения $y = h$ соответственно.

Система уравнений (1.1)–(1.4) представляет собой линейную однородную краевую задачу. Вызванное наличием подкоса граничное условие (1.4) делает ее довольно сложной задачей математической физики.

Решение (1.1)–(1.4) находим в виде

$$w(y, t) = f(y)e^{\lambda t}, \quad \theta(y, t) = \varphi(y)e^{\lambda t}, \quad (1.5)$$

где λ — собственное значение, $f(y)$ и $\varphi(y)$ — собственные функции. Подставляя (1.5) в (1.1)–(1.2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f(y)$, $\varphi(y)$:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \varphi \end{bmatrix} = 0, \quad (1.6)$$

где L_{ij} — линейные дифференциальные операторы.

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{d^2}{dy^2} EI \frac{d^2}{dy^2} + m\lambda^2 + c_{y\rho}^\alpha V b \lambda; \\
 L_{12} &= -m\sigma\lambda^2 - c_{y\rho}^\alpha V^2 b - c_{y\rho}^\alpha V b^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \lambda; \\
 L_{21} &= -m\sigma\lambda^2 + c_{m\rho}^\alpha V b^2 \lambda; \\
 L_{22} &= -\frac{d}{dy} GJ \frac{d}{dy} + I_m \lambda^2 - c_{m\rho}^\alpha V^2 b^2 - c_{m\rho}^\alpha V b^3 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16c_m^\alpha} \right) \lambda.
 \end{aligned} \right\} (1.7)$$

Граничные условия для функций $f(y)$ и $\varphi(y)$ получаются из (1.3), (1.4) заменой w и θ на f и φ соответственно.

Соотношения (1.6), (1.7), (1.3), (1.4) представляют собой задачу на собственные значения. В силу неконсервативности (несамосопряженности) задачи собственные значения λ являются комплексными величинами ($\lambda = \alpha + i\omega$). В зависимости от скорости потока V амплитуды решений (1.5) могут убывать с течением времени ($\text{Re } \lambda < 0$, устойчивость), оставаться постоянными ($\text{Re } \lambda = 0$, граница устойчивости), либо возрастать ($\text{Re } \lambda > 0$, неустойчивость). Обычно различают два основных типа потери устойчивости: колебательный тип (флаттер) и аperiодический (дивергенция). Критическая скорость флаттера V_f характеризуется соотношениями $\text{Re } \lambda = 0$, $\text{Im } \lambda = \omega \neq 0$, где ω — частота флаттера, а критическая скорость дивергенции V_d — равенством $\lambda = 0$. Критическая скорость крыла V_c равна наименьшей из скоростей V_f и V_d .

2. Метод решения. Для решения задачи на собственные значения (1.6), (1.7), (1.3), (1.4) воспользуемся методом Бубнова — Галеркина [5]. С этой целью выберем систему линейно независимых вектор-функций $(f_1(y), \varphi_1(y)), \dots, (f_n(y), \varphi_n(y))$, где f_i и φ_i соответственно четырежды и дважды непрерывно дифференцируемы на интервалах $(0, h)$ и $(h, 1)$ и удовлетворяют всем граничным условиям (1.3), (1.4). Согласно методу Бубнова — Галеркина, собственные функции $(f(y), \varphi(y))$ представляются в виде линейной комбинации координатных вектор-функций с неизвестными коэффициентами α_j , $j = 1, \dots, n$:

$$(f(y), \varphi(y)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (f_j(y), \varphi_j(y)). \quad (2.1)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1.6), затем умножая полученные соотношения скалярно на $(f_i(y), \varphi_i(y))$ и интегрируя по y от 0 до 1, получаем n линейных однородных уравнений относительно коэффициентов α_j , $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 (L_{11}[f_j]f_i + L_{12}[\varphi_j]f_i + L_{21}[f_j]\varphi_i + L_{22}[\varphi_j]\varphi_i) dy \right] \alpha_j = 0, \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

где дифференциальные операторы L_{ij} определены в (1.7). Используя (1.7), можно переписать (2.2) в виде

$$[\lambda^2 M + \lambda VB + C_1 + V^2 C_2] \bar{\xi} = 0, \quad (2.3)$$

где $\bar{\xi}$ — вектор-столбец, состоящий из неизвестных коэффициентов $\bar{\xi}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, а M, B, C_1, C_2 — блочные матрицы размером $n \times n$.

Соотношение (2.3) представляет собой алгебраическую задачу на собственные значения. Умножением слева на матрицу M^{-1} и введением вектора $\bar{\eta} = \lambda \bar{\xi}$ формула (2.3) сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы

$$\begin{bmatrix} O & E \\ -M^{-1}C_1 - V^2M^{-1}C_2 & -VM^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

а O и E — нулевая и единичная матрицы размерности $n \times n$. Форма (2.4) удобна для пользования стандартными программами вычислений.

Для численных расчетов необходимо найти систему линейно независимых координатных вектор-функций, удовлетворяющих всем граничным условиям (1.3), (1.4). В случае $\delta \neq 0$ в первом и последнем условии (1.4) одновременно присутствуют $f(y)$ и $\varphi(y)$, что делает нетривиальной процедуру отыскания достаточно большого числа таких вектор-функций. Рассмотрим следующую пару функций $f(y)$ и $\varphi(y)$:

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= \begin{cases} C_1(\operatorname{ch} ky - \cos ky) + C_2(\operatorname{sh} ky - \sin ky), & 0 < y < h, \\ D_1(\operatorname{ch} k(y-1) + \cos k(y-1)) + D_2(\operatorname{sh} k(y-1) + \sin k(y-1)), & h < y < 1; \end{cases} \\ \varphi(y) &= \begin{cases} E_1 \sin ky, & 0 < y < h, \\ E_2 \cos k(y-1), & h < y < 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Функции (2.5) удовлетворяют всем граничным условиям (1.3). Подставив их в (1.4), получим шесть линейных однородных уравнений относительно неизвестных констант:

$$A(k)\bar{C} = 0, \quad (2.6)$$

где $\bar{C}^T = (C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2)$, $A(k)$ — матрица порядка 6×6 . Нетривиальные решения этой системы существуют только при

$$\det A(k) = 0, \quad (2.7)$$

откуда определяются значения k , а затем из (2.6) находятся неизвестные $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$.

Находя последовательно $0 < k_1 < k_2 < \dots$ из (2.7) и соответствующие коэффициенты $C_1^i, C_2^i, D_1^i, D_2^i, E_1^i, E_2^i, i = 1, 2, \dots$, можно получить любое интересующее число линейно независимых вектор-функций $(f_i(y), \varphi_i(y)), i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих всем граничным условиям (1.3), (1.4).

Полученная система вектор-функций удобна для использования в методе Бубнова — Галеркина, так как интегралы в (2.2), в случае когда параметры крыла $EI(y), GJ(y), m(y), \dots$ аппроксимируются простыми аналитическими выражениями, можно вычислить аналитически.

3. Результаты численных расчетов. С использованием методики, описанной выше, рассматривалось прямоугольное крыло с постоянными характеристиками по размаху, параметры которого были взяты из работы М. В. Келдыша [1]. Для исследования аэроупругой устойчивости для различных положений точки крепления подкоса P на крыле было взято 50 точек по полуразмаху и 21 точка по хорде крыла, и в узлах полученной сетки $(h_j, x_{pj}), i = 0, \dots, 49, j = 0, \dots, 20$ изучалось поведение собственных значений при изменении скорости. Для некоторых областей значений h, x_p проводилось более подробное исследование. Рассматривался диапазон скоростей от 0 до 150 м/с.

Разложения (2.1) проводились по восьми функциям вида (2.5). При этом из (2.4) определялось 16 собственных значений. Увеличение количества вектор-функций в (2.1) до восемнадцати для нескольких контрольных точек показало, что максимальное изменение первых десяти, наименьших по абсолютной величине мнимой части, собственных значений составляет при этом около 0,5%, следующих двух — 2%.

Полученные результаты представлены на рис. 2, 3 в плоскостях параметров x_p, V и h, V с отмеченными на них областями устойчивости, флаттера и дивергенции. При этом соответствующие этим плоскостям значения h и x_p выбраны такими, чтобы показать наиболее характерные случаи расположения этих областей. На рис. 2, 3 линиями отмечены значения параметров, при которых одно из собственных значений пересекает мнимую ось ($\text{Re } \lambda = 0$).

При $V = 0$ все собственные значения λ — мнимые величины (в силу самосопряженности задачи). Каждая пара комплексно-сопряженных λ и $\bar{\lambda}$ соответствует одному тону колебаний. Пронумеруем эти тона по возрастанию абсолютных величин мнимых частей соответствующих им $\lambda, \bar{\lambda}$. При увеличении скорости собственные значения сходят с мнимой оси, двигаясь по некоторым траекториям на комплексной плоскости. При этом будем говорить, что λ соответствует тону с номером n , если при $V = 0$ оно соответствовало тону с этим номером. На рис. 2, 3 числа около кривых $\text{Re } \lambda = 0$ обозначают номер тона, которому эти λ соответствуют, причем $\text{Re } \lambda > 0$ с той стороны кривой, где поставлен номер.

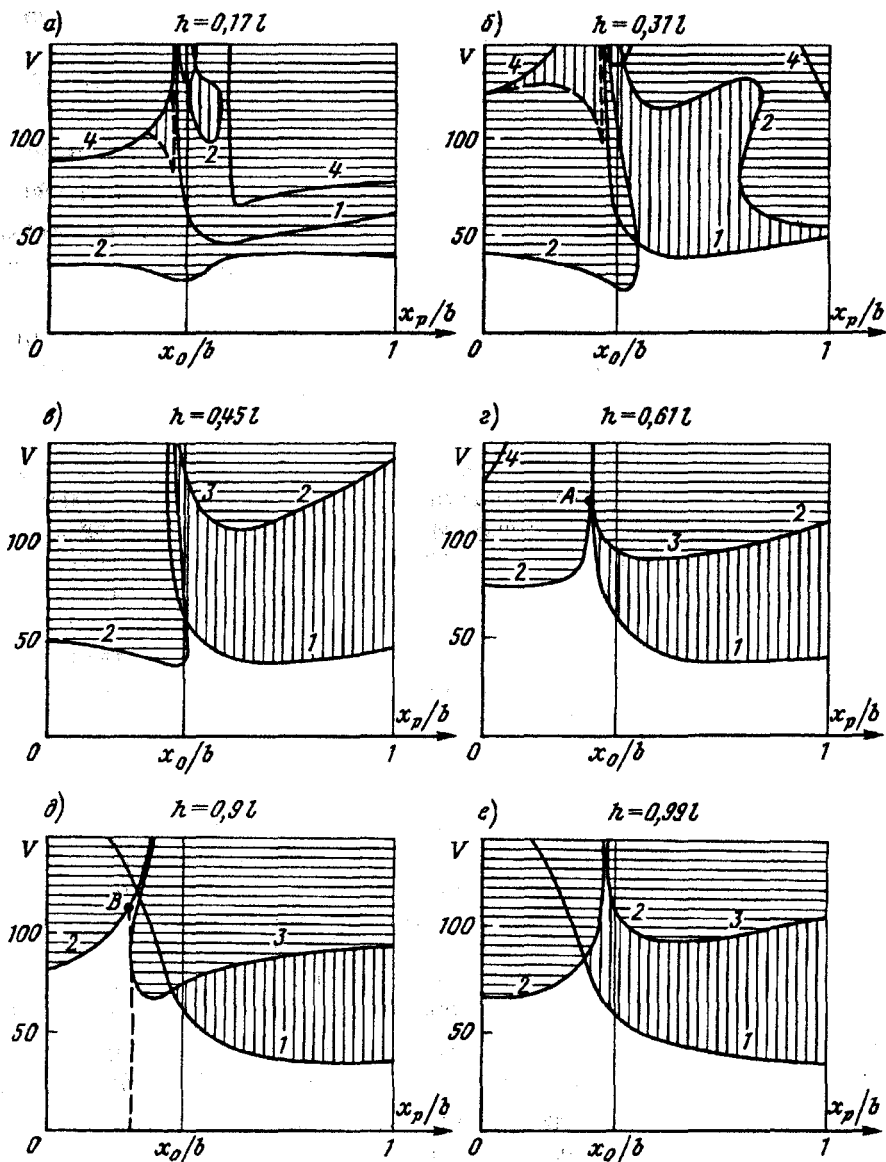


Рис. 2

Определим понятия областей устойчивости, флаттера и дивергенции. К области флаттера относятся те точки (значения h , x_p , V), при которых хотя бы для одного λ верны соотношения: $\text{Re } \lambda > 0$, $\text{Im } \lambda \neq 0$. Область дивергенции определяется наличием только действительных неустойчивых корней $\lambda > 0$. К области устойчивости относятся все остальные точки h , x_p , V , для которых $\text{Re } \lambda \leq 0$ для всех λ . На рис. 2, 3 области флаттера заштрихованы горизонтальными линиями, области дивергенции — вертикальными, области устойчивости оставлены незаштрихованными. Графиком критической скорости крыла является нижняя по V граница области неустойчивости. На рис. 2 проведена

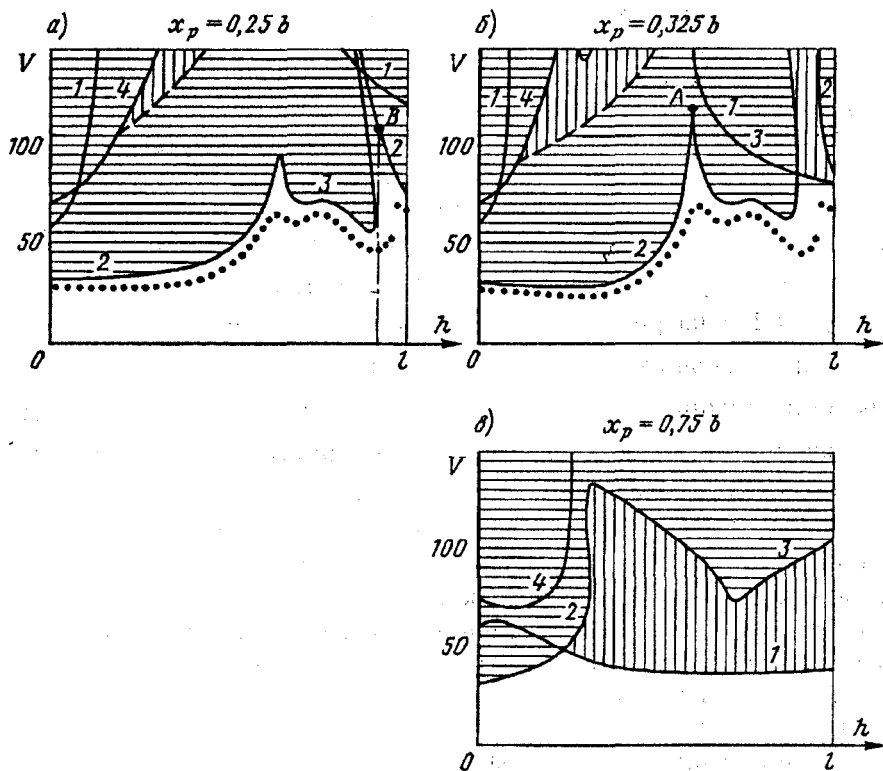


Рис. 3

вертикальная линия $x_p = x_0$, что соответствует $\delta = 0$ (креплению подкоса на упругой оси).

При изменении V два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda, \bar{\lambda}$, таких, что $\text{Re } \lambda > 0$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, могут перейти на вещественную ось. Если при этом других таких собственных значений нет, то произойдет переход из области флаттера в область дивергенции. Такие переходы отмечены на рис. 2, 3 штриховой линией.

Рассмотрим изменения, происходящие на плоскости параметров x_p, V при увеличении h от 0 до 1. При $h \rightarrow 0$ влияние подкоса на аэроупругую устойчивость крыла уменьшается, а при $h = 0$ пропадает совсем. Критическая скорость при этом равна критической скорости флаттера крыла без подкоса $V_c = 30$ м/с. При малых h потеря устойчивости происходит по флаттеру для всех x_p , но появляется и область дивергенции, рис. 2, а. С увеличением h правая часть области флаттера, соответствующая $x_p > x_0$, быстро сдвигается вверх, уступая место области дивергенции, рис. 2, б, в. Из рис. 2 можно сделать вывод, что примерно при $x_p < x_0$ крыло теряет устойчивость по флаттеру, а при $x_p > x_0$ — по дивергенции. Такой механизм потери устойчивости остается и при больших h , вплоть до 1 (консоль крыла). Значение x_p , при котором происходит смена флаттера на дивергенцию, только немного

сдвигается влево. Этот факт примечателен, поскольку характеризует влияние подкоса на аэроупругую устойчивость крыла: при креплении подкоса перед осью жесткости происходит флаттер, а при креплении за осью жесткости — дивергенция.

При дальнейшем увеличении h , рис. 2, *в, г, д, е*, область флаттера претерпевает сильные изменения. Ее левая часть поднимается, увеличивая критическую скорость. При $h = 0,61l$ достигается максимум $V_c = 117$ м/с при $x_p = 0,325b$ (т. *А* на рис. 2, *г*). При $h = 0,9l$, $x_p = 0,25b$ имеет место другой максимум $V_c = 116$ м/с (т. *В* на рис. 2, *д*). Заметим, что $x_p = 0,25b$ на рис. 2, *д* является точкой разрыва критической скорости: при меньших значениях x_p устойчивость теряется по второму тону, при больших — по третьему. При увеличении x_p и переходе через значение $x_p = 0,25b$ критическая скорость V_c перескакивает на значительно более низкое значение $V_c = 68$ м/с.

Из рис. 2 видно, что критическая скорость дивергенции — кривая с номером 1 (т. е. отвечающая первому тону) мало зависит от h . Основные же изменения относятся к критическим скоростям флаттера второго и более высоких тонов (кривые с номерами 2—4). Таким образом, удаление точки крепления подкоса h от основания мало влияет на первый, дивергентный тон, но оказывает большое влияние на более высокие, флаттерные тона.

На рис. 3 представлены расположения рассматриваемых областей на плоскости параметров h, V для нескольких значений x_p . На рис. 3, *а* устойчивость теряется по флаттеру для всех h , что характерно для $x_p < x_0$ (положение подкоса перед осью жесткости). Точками *А* и *В* на рис. 3, *а, б* отмечены оптимальные положения подкоса, отвечающие значениям критической скорости 117 м/с и 116 м/с соответственно. Для значений $x_p > x_0$ (подкос за осью жесткости) характерна ситуация, представленная на рис. 3, *в*: для достаточно больших h (примерно больше четверти полуразмаха) потеря устойчивости происходит по дивергенции.

Из рис. 2, *г, д* и 3, *а, б* видно, что точки максимумов критической скорости *А* и *В* расположены на границах узких, сильно углубленных в область флаттера частей области устойчивости. Поэтому при фиксированных параметрах и увеличении V точка, приближаясь к оптимальному значению *А* или *В*, подходит очень близко к границе области неустойчивости (в случае *В* она даже касается области флаттера в точке со значительно более низким значением скорости). Очевидно, что параметры системы определяются с некоторыми ошибками. В нашем случае (точки *А* и *В*) даже малое изменение параметров может очень сильно снизить значение V_c . Например, в случае *В* критическая скорость снижается в 1,7 раза вследствие разрыва. Поэтому задача максимизации по h и x_p критической скорости, определенной соотношением

$$V_c = \inf\{V > 0: \exists \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0\}, \quad (3.1)$$

в данном случае теряет смысл. Подобная ситуация в задачах максимизации критической нагрузки достаточно типична (см., например, [6], [7]). Возникает необходимость изменить постановку задачи оптимизации, а именно ввести такое определение критической скорости, которое устранил это противоречие.

4. Критерий устойчивости и определение критической скорости с учетом разброса параметров. Пусть линейная колебательная система, подверженная неустойчивости типа флаттера и дивергенции, содержит параметры $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, которые определяются не точно, а с некоторой погрешностью:

$$|p_i - p_i^0| \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Здесь $\bar{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ — значения параметров, которые определяются измерениями или находятся из эксперимента и используются в численных расчетах, Δ_i — величины погрешностей измерений или эксперимента. Параметр скорости V не включается в вектор \bar{p} . Предполагается, что ошибка численных расчетов пренебрежимо мала.

Неравенства (4.1) задают множество U_0 допустимых значений вектора \bar{p} :

$$U_0 \doteq \{ \bar{p} \in R^n : |p_i - p_i^0| \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n \}. \quad (4.2)$$

Дадим определение устойчивости с учетом разброса параметров. Пусть фиксированы параметры $p_i^0, i = 1, \dots, n$ и значение скорости V . Тогда система устойчива, если для любого $\bar{p} \in U_0$ для всех собственных значений λ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0. \quad (4.3)$$

Если неравенство (4.3) не выполнено для некоторого $\bar{p} \in U_0$ и некоторого λ , то система неустойчива. Критической скоростью в этом случае будет называться нижняя грань значений скорости, для которых система неустойчива в соответствии с новым определением:

$$V_c^* = \inf \{ V > 0 : \exists \bar{p} \in U_0 : \exists \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0 \}. \quad (4.4)$$

Определение (4.4) является обобщением определения критической скорости (3.1) на случай параметров, заданных с погрешностью. Это определение фактически обобщает такое понятие, как «запас по параметру» [8].

Рассмотрим простое собственное значение λ системы, отвечающее вектору параметров \bar{p}_0 и скорости V . Оно дифференцируемо по Фреше по \bar{p} в т. \bar{p}_0 [9]. Пусть в окрестности U_0 это λ остается од-

нократным, а производная от λ по \bar{p} мало меняется. Тогда в U_0 можно воспользоваться линейным приближением

$$\lambda(\bar{p}) \approx \lambda(\bar{p}_0) + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{p}} (\bar{p} - \bar{p}_0). \quad (4.5)$$

В этом случае

$$\max_{\bar{p} \in U_0} \operatorname{Re} \lambda(\bar{p}) \approx \operatorname{Re} \lambda(\bar{p}_0) + \sum_{i=1}^n \left| \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \right| \Delta_i. \quad (4.6)$$

Если эти условия выполнены для всех собственных значений λ при \bar{p}_0 и V , то (4.5) и (4.6) также выполнены для всех λ .

С учетом соотношения (4.6) определение критической скорости (4.4) примет вид

$$V_c^* = \inf \left\{ V > 0 : \exists \lambda, \operatorname{Re} \lambda(\bar{p}_0) + \sum_{i=1}^n \left| \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \right| \Delta_i > 0 \right\}. \quad (4.7)$$

Отметим, что условие ограниченности градиента $\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{p}}$ не выполняется в окрестности кратных собственных значений с жордановой клеткой порядка больше единицы. Однако при малых погрешностях Δ_i и отсутствии кратных собственных значений в U_0 обычно можно использовать (4.7). Кроме того, неравенство в (4.7) достаточно проверять только для значений λ , соответствующих нескольким первым тонам, опуская проверку для более высоких и заведомо устойчивых в рассматриваемой области тонов.

Если задача состоит в исследовании устойчивости системы в зависимости от части параметров $\bar{q}_1 = (p_1, \dots, p_k)$, $k < n$ (в данном случае $p_1 = h/l$, $p_2 = x_p$, $k = 2$), то вычислять производные от λ по этим параметрам нецелесообразно. Удобнее сначала вычислить критическую скорость $V_c^{**}(\bar{q}_1)$, учитывая разброс оставшихся параметров $\bar{q}_2 = (p_{k+1}, \dots, p_n)$ по формуле (4.7), а затем найти критическую скорость V_c^* с помощью исследования окрестности точки $\bar{q}_1^0 = (p_1^0, \dots, p_k^0)$ по формуле

$$V_c^*(\bar{q}_1^0) = \inf \left\{ V_c^{**}(\bar{q}_1) : |p_i - p_i^0| < \Delta_i, i = 1, \dots, k \right\}. \quad (4.8)$$

Практически это можно осуществить, используя перебор значений V_c^{**} в точках $p_i^0 \pm \Delta_i$, $i = 1, \dots, k$, т.е.

$$V_c^*(\bar{q}_1^0) = \min V_c^{**}(p_1^0 \pm \Delta_1, \dots, p_k^0 \pm \Delta_k). \quad (4.9)$$

Таким образом, с помощью соотношений (4.7), (4.9) определяется критическая скорость с учетом разброса параметров.

5. Нахождение критической скорости крыла с подкосом с учетом разброса параметров. Найдем производные $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}$ для нашей системы. Все параметры крыла считаются постоянными по размаху, поэтому вектор \bar{p} имеет вид $\bar{p} = (p_1, \dots, p_{12}) = (h/l, x_p, EI/l^4, GJ/l^2, m, \sigma, I_m, c_y^\alpha, c_m^\alpha, b, x_0, \rho)$. Нас интересует исследование устойчивости по параметрам $p_1 = h/l$ и $p_2 = x_p$, поэтому необходимо вычислять производные от λ лишь по параметрам $p_i, i = 3, \dots, 12$.

Давая приращения $\delta \lambda, \delta \bar{u}(y), \delta p_i, i = 3, \dots, 12$, где $\bar{u}(y)^T = (f(y), \varphi(y))$, запишем с использованием (1.6) уравнение в вариациях [10]:

$$\left[L(\lambda_0, \bar{p}_0) + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p_i \right] [\bar{u} + \delta \bar{u}] = 0. \quad (5.1)$$

Умножим (5.1) слева на $\bar{V}^T(y) = (f_v(y), \varphi_v(y))$ — собственную вектор-функцию транспонированной к (1.6) задачи

$$L^T(\lambda_0, \bar{p}_0) \bar{V}(y) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_v(y) \\ \varphi_v(y) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

с теми же граничными условиями и проинтегрируем полученное соотношение по y от 0 до 1:

$$\int_0^1 \bar{V}^T \left[L(\lambda_0, \bar{p}_0) + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p_i \right] [\bar{u} + \delta \bar{u}] dy = 0. \quad (5.3)$$

Интегрируя по частям первый член суммы с помощью граничных условий (1.3), имеем

$$\int_0^1 \bar{V}^T L(\lambda_0, \bar{p}_0) [\bar{u} + \delta \bar{u}] dy = EI \left(f_v f_{u1}^{(3)} - f_v' f_{u1}'' + f_v'' f_{u1}' - f_v^{(3)} f_{u1} \right) \Big|_{h+0}^{h-0} - GJ (\varphi_v \varphi_{u1}' - \varphi_v' \varphi_{u1}) \Big|_{h+0}^{h-0} + \int_0^1 [\bar{u} + \delta \bar{u}]^T L^T(\lambda_0, p_0) \bar{V} dy,$$

где $(\bar{u}(y) + \delta \bar{u}(y))^T = (f_{u1}(y), \varphi_{u1}(y))$, а штрихами обозначено дифференцирование по y . Используя (5.2) и граничные условия (1.4) для \bar{V} и $\bar{u} + \delta \bar{u}$ и учитывая при этом, что эти условия для $\bar{u} + \delta \bar{u}$ записываются для возмущенных значений параметров $\bar{p}_0 + \delta \bar{p}$, а для \bar{V} — для невозмущенных значений \bar{p}_0 , получаем

$$\int_0^1 \bar{V}^T L(\lambda_0, \bar{p}_0) [\bar{u} + \delta \bar{u}] dy = -f_v(h) (f^{(3)}(h-0) - f^{(3)}(h+0)) \delta p_3 + \varphi_v(h) (\varphi'(h-0) - \varphi'(h+0)) \delta p_4.$$

С учетом этого равенства (5.3) принимает вид

$$L_i^* \delta p_i + \int_0^1 \bar{V}^T \left[\frac{\partial L}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p_i \right] \bar{u} dy = 0, \quad (5.4)$$

где коэффициенты L_i^* равны:

$$L_3^* = -f_v(h) \left(f^{(3)}(h-0) - f^{(3)}(h+0) \right);$$

$$L_4^* = \varphi_v(h) \left(\varphi'(h-0) - \varphi'(h+0) \right); \quad (5.5)$$

$$L_i^* = 0, \quad i = 5, \dots, 12.$$

Поделив (5.4) на δp_i , получим интересующие нас производные:

$$\frac{\partial \lambda}{\delta p_i} = - \frac{L_i^* + \int_0^1 \bar{V}^T \frac{\partial L}{\partial p_i} \bar{u} dy}{\int_0^1 \bar{V}^T \frac{\partial L}{\partial \lambda} \bar{u} dy}. \quad (5.6)$$

Эти производные можно определить приближенно, используя для вектор-функций $\bar{u}(y)$ и $\bar{v}(y)$ разложения по методу Бубнова — Галеркина:

$$\bar{u}^T(y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (f_j(y), \varphi_j(y)), \quad \bar{V}^T(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i (f_i(y), \varphi_i(y)), \quad (5.7)$$

где функции $f_i(y)$, $\varphi_i(y)$, $i = 1, \dots, n$, определяются из (2.5), (2.6), коэффициенты $\bar{\xi} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ находятся из уравнения (2.3), а коэффициенты $\bar{\zeta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — из решения транспонированной к (2.3) задачи:

$$\left[\lambda^2 M + \lambda VB + C_1 + V^2 C_2 \right]^T \bar{\zeta} = 0. \quad (5.8)$$

Подставим разложения (5.7) в (5.6) и вынесем векторы коэффициентов $\bar{\xi}$ и $\bar{\zeta}$ за знак интеграла. В результате получим

$$\frac{\partial \lambda}{\delta p_i} = - \frac{\bar{\zeta}^T \left[D_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\lambda^2 M + \lambda VB + C_1 + V^2 C_2 \right] \right] \bar{\xi}}{\bar{\zeta}^T \left[2\lambda M + VB \right] \bar{\xi}}, \quad (5.9)$$

где D_i , $i = 5, \dots, 12$, — нулевые матрицы порядка $n \times n$, а матрицы D_3 и D_4 имеют вид

$$\begin{aligned} D_3 &= [D_{3ij}] = \left[-f_i(h)(f_j^{(3)}(h-0) - f_j^{(3)}(h+0)) \right]; \\ D_4 &= [D_{4ij}] = \left[\varphi_i(h)(\varphi_j'(h-0) - \varphi_j'(h+0)) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При выводе (5.9) было использовано соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{V}^T \frac{\partial L}{\partial p_k} \bar{u} dy &= \bar{\zeta}^T \left[\int_0^1 (f_i(y), \varphi_i(y)) \frac{\partial L}{\partial p_k} (f_j(y), \varphi_j(y))^T dy \right] \bar{\xi} = \\ &= \bar{\zeta}^T \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\int_0^1 (f_i(y), \varphi_i(y)) L(f_j(y), \varphi_j(y))^T dy \right] \bar{\xi} = \\ &= \bar{\zeta}^T \frac{\partial}{\partial p_k} [\lambda^2 M + \lambda VB + C_1 + V^2 C_2] \bar{\xi}, \end{aligned}$$

а также равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{V}^T \frac{\partial L}{\partial \lambda} \bar{u} dy &= \bar{\zeta}^T \frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda^2 M + \lambda VB + C_1 + V^2 C_2] \bar{\xi} = \\ &= \bar{\zeta}^T [2\lambda M + VB] \bar{\xi}. \end{aligned}$$

Используя (5.9), (5.10) в (4.7), можно найти значение критической скорости $V_c^{**}(\bar{q}_1)$ в зависимости от параметров $\bar{q}_1 = (h/l, x_p)$, после чего из (4.9) найдем $V_c^*(\bar{q}_1)$ — искомую критическую скорость, в которой учтены погрешности всех параметров. Такой способ вычисления V_c^* очень эффективен, поскольку для него необходимо решать только прямую и транспонированную задачи (2.3) и (5.8), что увеличивает время вычисления V_c^* по сравнению с временем вычисления обычной критической скорости всего лишь в два-три раза.

При помощи описанной выше методики была исследована критическая скорость крыла с учетом погрешностей параметров, которые были выбраны равными $\Delta_1 = 0,02$, $\Delta_2 = 0,05b$ и

i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	EI/l^4	GJ/l^2	m	σ	I_m	c_y^α	c_m^α	b	x_0	ρ
$\Delta_i / p_i, \%$	5	5	3	5	3	1	1	2	5	0

Неравенство в (4.7) проверялось только для собственных значений, соответствующих первым пяти тонам, поскольку более высокие тона устойчивы для рассматриваемых значений параметров.

Результаты вычислений для $x_p = 0,25b$ и $0,325b$ представлены на рис. 3, а, б точечной линией. На участках, где обыкновенная критическая скорость $V_c(h, \delta)$ изменяется мало, V_c^* отличается от V_c в среднем на 15%, однако когда V_c быстро растет или убывает при изменении h и δ , V_c^* значительно меньше V_c . Особенно это относится к узким частям области устойчивости, глубоко вклинивающимся в область неустойчивости. Как отмечалось выше, оптимальные значения критической скорости находятся на границе именно таких частей. Поэтому V_c уменьшается в оптимальных точках примерно в полтора раза при учете погрешностей параметров. Максимумы V_c^* достигаются при $h = 0,61l$, $x_p = 0,3b$ и $h = 0,91l$, $x_p = 0,05b$, где V_c^* равна 71 м/с и 76 м/с соответственно. Это значительно меньше соответствующих максимальных значений $V_c = 117$ м/с и $V_c = 116$ м/с, но точки, где достигается максимум, отличаются незначительно.

Таким образом, задача оптимизации критической скорости в первоначальной постановке (3.1) приводит к большим выигрышам, которые оказываются бессмысленными с практической точки зрения, так как небольшие погрешности параметров значительно уменьшают V_c . Это подтверждает необходимость учета разброса параметров, в особенности когда критическая скорость сильно меняется на некоторых участках, например, терпит разрыв или резко возрастает и сразу уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Вибрации в воздушном потоке крыла с подкосами//Труды ЦАГИ.— 1938. Вып. 357, а также в кн.: Келдыш М. В. Избранные труды. Механика.— М.: Наука.— 1985.
2. Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Задача Келдыша об аэроупругой устойчивости крыла с подкосами//ДАН.— 1996. Т. 350, № 4.
3. Гроссман Е. П. Флаттер//Труды ЦАГИ.— 1937. Вып. 284.
4. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости.— М.: Физматгиз.— 1959.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука.— 1970.
6. Буньков В. Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента//Труды ЦАГИ.— 1969. Вып. 1166.
7. Сейранян А. П., Шаранюк А. В. Чувствительность и оптимизация критических параметров в задачах динамической устойчивости//Изв. АН СССР, Механика твердого тела.— 1983, № 5.
8. Макаревский А. И., Чижов В. М. Основы прочности и аэроупругости летательных аппаратов.— М.: Машиностроение.— 1982.
9. Sun J.-G. Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on several parameters//J. Comput. Math.— 1985. Vol. 3.
10. Seyranian A. P. Sensitivity analysis and optimization of aeroelastic stability//Int. J. Solids and Structures.— 1982. Vol. 18, N 9.