Приведение семейств матриц к нормальным формам и приложение к теории устойчивости

А. А. МАЙЛЫБАЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mailybaev@inmech.msu.su

УДК 512.643

Ключевые слова: семейство матриц, нормальная форма, версальная деформация, устойчивость, касательный конус.

Аннотация

Рассматриваются семейства матриц, голоморфно (гладко) зависящих от вектора комплексных (вещественных) параметров. В. И. Арнольдом (1971 г.) были найдены нормальные формы семейств комплексных матриц (миниверсальные деформации), к которым приводится любое семейство в окрестности некоторой точки при помощи гладко зависящей от параметров замены базиса и гладкой замены параметров. Миниверсальные деформации вещественных матриц были получены Д. М. Галиным (1972 г.). В настоящей работе предлагается метод нахождения функций, описывающих замену базиса и замену параметров, приводящих произвольное семейство к миниверсальной деформации. Функции находятся в виде рядов Тейлора, где производные функций по параметрам определяются из рекуррентных соотношений через производные этих функций более низкого порядка и производные приводимого семейства. Приведены примеры.

Полученные результаты расширяют круг возможных приложений миниверсальных деформаций к исследованию различных свойств семейств матриц. Это показано в настоящей работе, где найдены касательные конусы к области устойчивости (линейные приближения) в точках её границы.

Abstract

A. A. Mailybaev, Transformation of matrix families to normal forms and its application to stability problems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 4, p. 1111–1133.

Families of matrices, smoothly dependent on a vector of parameters, are considered. V. I. Arnold (1971) has found normal forms of families of complex matrices (miniversal deformations), such that any family of matrices in the vicinity of a point can be transformed to them by smoothly dependent on the vector of parameters change of basis and smooth change of parameters. Miniversal deformations of real matrices have been studied by D. M. Galin (1972). In this paper a method of determining functions describing change of basis and change of parameters, transforming arbitrary family to the miniversal deformation, is suggested. The functions are

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 4, с. 1111–1133.

found as Taylor series, where derivatives of the functions are determined from a recurrent procedure using derivatives of these functions of lower orders and derivatives of the family. Examples are given.

The results obtained allow to use miniversal deformations for investigation of different properties of matrix families more efficiently. This is shown in the paper, where tangent cones to the stability domain (linear approximations) at boundary points are found.

Введение

В работе рассматриваются семейства комплексных и вещественных матриц A, голоморфно (гладко) зависящих от вектора комплексных (вещественных) параметров p. Известно, что среди всех семейств матриц можно выделить такие, к которым приводится любое семейство в окрестности некоторого значения вектора параметров при помощи гладко зависящей от параметров замены базиса и гладкой замены параметров [1–3]. Такие семейства называются версальными деформациями. Версальные деформации с минимальным возможным числом параметров (нормальные формы) называются миниверсальными. Миниверсальные деформации комплексных матриц были найдены В. И. Арнольдом [1–3]. Им было показано, что миниверсальная деформация, к которой в окрестности точки $p = p_0$ приводится семейство $A(p)$, определяется жордановой структурой матрицы $A(p_0)$. Миниверсальные деформации вещественных матриц были найдены Д. М. Галиным [4].

Вопрос о том, как находить функции, описывающие замену базиса и замену параметров, приводящие заданное семейство матриц к миниверсальной деформации, до настоящего момента оставался открытым. Отыскание этих функций составляет важную часть задачи приведения семейства матриц к нормальной форме и необходимо для эффективного использования нормальных форм. Настоящая работа посвящена решению этой задачи. В ней предлагается конструктивный метод отыскания искомых функций в виде рядов Тейлора, где производные функций по параметрам (определяющие коэффициенты для членов ряда) находятся из рекуррентных соотношений через производные этих функций более низкого порядка и производные приводимого семейства. Предлагаемые рекуррентные соотношения имеют простой вид и удобны для численных расчетов, поскольку требуют лишь последовательного выполнения элементарных арифметических операций. Доказательства основаны на использовании свойств централизаторов матриц, приведенных к жордановой форме.

Приведение семейств матриц к нормальным формам имеет большое прикладное значение, поскольку позволяет исследовать семейства конкретного (обычно значительно более простого) вида — миниверсальные деформации, и затем переносить полученные результаты на произвольные семейства. Миниверсальные деформации (без приводящих к ним преобразований) были использованы в [2, 3] для классификации особенностей декремент-диаграмм и границ областей устойчивости и в [5] для нахождения касательных конусов (линейных приближений) к области устойчивости в точках её границы с точностью до диффеоморфизма. В [6] были найдены некоторые линейные комбинации первых производных функции замены параметров, приводящей к миниверсальной деформации, что позволило найти необходимые условия для стабилизирующего возмущения матрицы. Знание преобразований базиса и параметров, приводящих к нормальной форме, расширяет круг возможных приложений, поскольку позволяет переносить на произвольное семейство не только качественные характеристики нормальной формы, но и количественные. Это показано в настоящей работе, где с использованием миниверсальной деформации и производных приводящей к ней функции замены параметров найдены касательные конусы к области устойчивости (или части касательных конусов) в точках её границы по собственным и присоединённым векторам матрицы и её производным в данной точке. Рассмотрены все возможные типы граничных точек. Полученные результаты являются развитием работы [7], где касательные конусы для точек границы области устойчивости общего двух- и трехпараметрического семейства были найдены другим методом.

Работа имеет следующую структуру. В § 1 находятся рекуррентные соотношения для производных функций замены базиса и параметров, приводящих семейство комплексных матриц к миниверсальной деформации. В § 2 аналогичные соотношения выводятся для семейств вещественных матриц. В § 3 полученные результаты используются для нахождения касательных конусов к области устойчивости семейства матриц в точках её границы. В заключении дается краткий обзор полученных результатов и обсуждаются возможности их приложения к другим задачам.

§ 1. Приведение семейств матриц к нормальным формам

Для изложения теории нормальных форм семейств матриц нам потребуются определения, введённые В. И. Арнольдом [1–3].

Определение 1. Семейством матриц называется голоморфное отображение $A\colon P \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ области P в пространстве параметров $\mathbb{C}^m$ в пространство матриц $\mathbb{C}^{n^2}$.

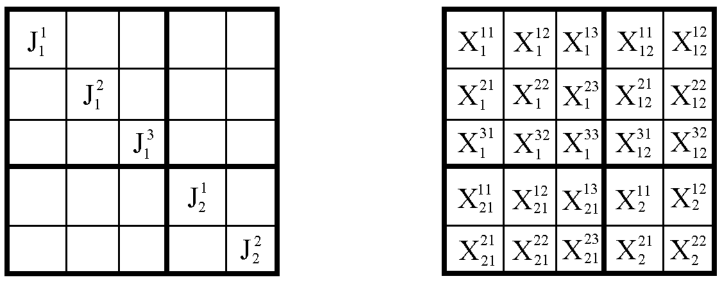
Рассмотрим произвольное семейство матриц $A(p)$, $p=(p^1,\dots,p^m)^T\in\mathbb{C}^m$, определённое в некоторой окрестности точки $p=p_0$. Пусть C_0 — невырожденная матрица, приводящая матрицу $A_0=A(p_0)$ к верхнетреугольной жордановой форме J:

$$A_0 = C_0 J C_0^{-1}. \tag{1.1}$$

Обозначим через λ_i собственные значения матрицы A_0, и пусть $n_1(\lambda_i)\geqslant \geqslant n_2(\lambda_i)\geqslant \dots$ — размеры принадлежащих λ_i жордановых клеток, упорядоченных начиная с наибольшей. Тогда матрица J имеет блочно-диагональный вид $J = \mathrm{Diag}(J_1, J_2, \dots)$, где J_i — квадратная матрица размера $n_1(\lambda_i) + n_2(\lambda_i) + \dots$, отвечающая собственному значению λ_i, которая также имеет блочно-диагональный вид $J_i = \mathrm{Diag}(J_i^1, J_i^2, \dots)$, рис. 1а, где J_i^k — жорданов блок размера $n_k(\lambda_i)$:

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения разбиения произвольной матрицы X размера $n \times n$ на блоки в соответствии со структурой J. Обозначим через X_{ij}^{kl} блок, стоящий в X на пересечении строк и столбцов блоков J_i^k и J_j^l соответственно, рис. 1б. Элементы блоков X_{ij}^{kl} обозначим через $x_{ij}^{kl}(r, s)$, $r = 1, \dots, n_k(\lambda_i)$, $s = 1, \dots, n_l(\lambda_j)$, где r и s — номера строки и столбца в X_{ij}^{kl}, в которых стоит элемент. Аналогично производится разбиение блочно-диагональных матриц типа $X = \mathrm{Diag}(X_1, X_2, \dots)$ на блоки X_i^{kl} с элементами $x_i^{kl}(r, s)$, $r = 1, \dots, n_k(\lambda_i)$, $s = 1, \dots, n_l(\lambda_i)$.



(а) (б)

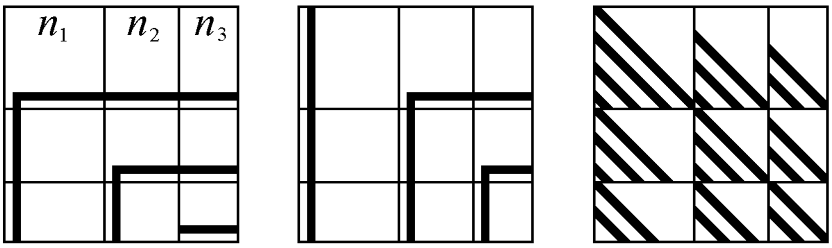
Рис. 1. Разбиение матрицы X в соответствии с жордановой формой J

Определение 2. Версальной деформацией матрицы A_0 называется семейство матриц $A'(p')$, $p' \in \mathbb{C}^d$, такое что любое семейство $A(p)$, $A(p_0) = A_0$ в окрестности точки $p = p_0$ представимо в виде

$$A(p) = C(p)A'(\varphi(p))C^{-1}(p), \tag{1.2}$$

где $p' = \varphi(p)$, $\varphi(p_0) = \mathbf{0}$ — голоморфное отображение окрестности точки $p = p_0$ в пространстве $\mathbb{C}^m$ в окрестность нуля в пространстве $\mathbb{C}^d$; $C(p)$ — семейство невырожденных матриц, определённое в окрестности $p = p_0$. Версальная деформация с наименьшим возможным количеством параметров называется миниверсальной [1–3].

В [1–3] показано, что миниверсальная деформация определяется жордановой структурой матрицы A_0 и может быть выбрана в виде суммы $J+B(p')$, где $B(p') = \mathrm{Diag}(B_1, B_2, \dots)$ — семейство блочно-диагональных матриц, блоки которых $B_i(p')$ соответствуют блокам J_i матрицы J. Каждый такой блок может быть выбран различными способами в виде блока, заполненного нулями за исключением мест, отмеченных на рис. 2. В случаях рис. 2а, б отмеченные места заполнены различными компонентами вектора p' (параметрами версальной деформации); в случае рис. 2в каждый косой отрезок заполнен соответствующей ему отдельной компонентой p'. Возможны также другие типы блоков, у которых каждый косой отрезок на рис. 2в заполнен нулями, за исключением одного элемента, где стоит независимый параметр. Во всех случаях в каждом блоке B_i^{kl} стоит ровно $n_l(\lambda_i)$ при $k \leqslant l$ и $n_k(\lambda_i)$ при $k > l$ различных компонент p' (по одной на каждом косом отрезке на рис. 2в). Обозначим эти компоненты через $b_i^{kl}(t)$, $t = 1, \dots, \min(n_k(\lambda_i), n_l(\lambda_i))$, пронумеровав их сверху вниз и справа налево (см. пример для случая двух жордановых клеток размеров 3 и 2 на рис. 3). Элементы $b_i^{kl}(t)$ составляют в совокупности вектор параметров миниверсальной деформации p' размерности $d = \sum_i (n_1(\lambda_i) + 3n_2(\lambda_i) + \dots)$ [1–3].



(а) (б) (в)

Рис. 2. Расположение параметров в блоках миниверсальной деформации

Введём обобщённый след $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)X$, $1 \leqslant t \leqslant \min(n_k(\lambda_i), n_l(\lambda_i))$, матрицы X, равный сумме элементов, стоящих на диагонали блока X_{ii}^{kl}, соответствующей t-му, начиная с наибольшего, косому отрезку блока B_i^{kl} на рис. 2в:

$$\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)X = \sum_{r=t}^{n'} x_{ii}^{kl}(n_k(\lambda_i) - n' + r,\ r - t + 1), \quad n' = \min(n_k(\lambda_i), n_l(\lambda_i)). \quad (1.3)$$

В частности, обобщённый след $\mathrm{Tr}_i^{kl}(n')X$ равен нижнему левому элементу блока X_{ii}^{kl}, а обобщённый след $\mathrm{Tr}_i^{kk}(1)X$ совпадает с обычным следом $\mathrm{Tr}\, X_{ii}^{kk}$, равным сумме элементов, стоящих на главной диагонали блока X_{ii}^{kk}. Для семейства $B(p')$ имеем $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)B = \alpha_i^{kl}(t) b_i^{kl}(t)$, где $\alpha_i^{kl}(t) = 1$, если B_i — блок первого или второго типа, рис. 2а, 2б, и $\alpha_i^{kl}(t) = n' - t + 1$, если B_i — блок третьего типа, рис. 2в.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
$b_i^{11}(3)$	$b_i^{11}(2)$	$b_i^{11}(1)$	$b_i^{12}(2)$	$b_i^{12}(1)$
$b_i^{21}(1)$	0	0	0	0
$b_i^{21}(2)$	0	0	$b_i^{22}(2)$	$b_i^{22}(1)$

(а)

$b_i^{11}(1)$	0	0	0	0
$b_i^{11}(2)$	0	0	0	0
$b_i^{11}(3)$	0	0	$b_i^{12}(2)$	$b_i^{12}(1)$
$b_i^{21}(1)$	0	0	$b_i^{22}(1)$	0
$b_i^{21}(2)$	0	0	$b_i^{22}(2)$	0

(б)

$b_i^{11}(1)$	0	0	0	0
$b_i^{11}(2)$	$b_i^{11}(1)$	0	$b_i^{12}(1)$	0
$b_i^{11}(3)$	$b_i^{11}(2)$	$b_i^{11}(1)$	$b_i^{12}(2)$	$b_i^{12}(1)$
$b_i^{21}(1)$	0	0	$b_i^{22}(1)$	0
$b_i^{21}(2)$	$b_i^{21}(1)$	0	$b_i^{22}(2)$	$b_i^{22}(1)$

(в)

Рис. 3. Нумерация параметров миниверсальной деформации

Обозначим через D^h производную $\frac{\partial^{|h|}}{\partial p_1^{h^1}\ldots\partial p_m^{h^m}}$, взятую в точке $p = p_0$, где $h = (h^1, \ldots, h^m)$, $h^i \geqslant 0$ — мультииндекс, компоненты h^i которого определяют порядок частной производной по p^i (в случае $h^i = 0$ производная по p^i не берётся), $|h| = h^1 + \ldots + h^m$ — порядок производной.

Приведение семейства матриц $A(p)$ к нормальной форме (миниверсальной деформации) (1.2) включает в себя нахождение семейства $A'(p')$ по жордановой форме J матрицы A_0, семейств $C(p)$, $C^{-1}(p)$ и голоморфного отображения $p' = \varphi(p)$ (зависимостей $b_i^{kl}(t)(p)$). Для определения $C(p)$, $C^{-1}(p)$ и $b_i^{kl}(t)(p)$ достаточно определить производные D^hC, D^hC^{-1} и $D^hb_i^{kl}(t)$ для всех h, после чего искомые функции локально находятся (в силу голоморфности) в виде рядов Тейлора.

Теорема 1. *В принятых обозначениях верны следующие соотношения для производных D^h, $|h| > 0$, функций $C(p)$, $C^{-1}(p)$ и $b_i^{kl}(t)(p)$, приводящих семейство матриц $A(p)$ к миниверсальной деформации $A'(p')$ описанного выше вида (1.2):*

(i)
$$D^h b_i^{kl}(t) = \frac{\mathrm{Tr}_i^{kl}(t) F}{\alpha_i^{kl}(t)}, \tag{1.4}$$

$$F = C_0^{-1}\Bigg(D^h A - \sum_{\substack{h_1+h_2+h_3=h\\ h_1,h_2,h_3\neq h}} C_h^{h_1h_2h_3} D^{h_1}C\, D^{h_2}A'\, D^{h_3}C^{-1} + \\ + A_0 \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\ h_1,h_2\neq h}} C_h^{h_1h_2} D^{h_1}C\, D^{h_2}C^{-1}\Bigg)C_0, \tag{1.5}$$

$$C_h^{h_1h_2h_3} = \prod_{i=1}^m \frac{h^i!}{h_1^i!h_2^i!h_3^i!}, \quad C_h^{h_1h_2} = \prod_{i=1}^m \frac{h^i!}{h_1^i!h_2^i!};$$

(ii)
$$D^h C = C_0 X, \tag{1.6}$$

$$x_{ij}^{kl}(r,s) = \sum_{r_1=r}^{n_k(\lambda_i)} \sum_{s_1=1}^{s} \frac{(-1)^{r_1-r}}{(\lambda_i-\lambda_j)^{r_1-r+s-s_1+1}} C_{r_1-r+s-s_1}^{r_1-r} g_{ij}^{kl}(r_1,s_1), \ \ i\neq j, \tag{1.7}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$x_{ii}^{kl}(r,s) = \begin{cases} 0, & k\leqslant l,\ r=1,\\ \displaystyle\sum_{s_1=s'(r,s)}^{s} g_{ii}^{kl}(r-s+s_1-1,s_1), & k\leqslant l,\ r\neq 1,\\ \displaystyle -\sum_{r_1=r}^{r'(r,s)} g_{ii}^{kl}(r_1,s-r+r_1+1), & k>l,\ s\neq n_l(\lambda_i),\\ 0, & k>l,\ s=n_l(\lambda_i),\end{cases} \tag{1.8}$$

$$s'(r,s) = \max(1, s-r+2), \quad r'(r,s) = \min(n_k(\lambda_i), r-s+n_l(\lambda_i)-1),$$

$$G = D^h A' - F, \tag{1.9}$$

(iii)
$$D^h C^{-1} = -C_0^{-1} \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\ h_2\neq h}} C_h^{h_1h_2} D^{h_1}C\, D^{h_2}C^{-1}. \tag{1.10}$$

Для производных нулевого порядка $h = \mathbf{0}$ (значений функций при $p = p_0$) имеем $D^0C = C_0$, $D^0C^{-1} = C_0^{-1}$, $D^0A' = J$. Теорема позволяет найти производные D^h функций C, C^{-1} и $b_i^{kl}(t)$ порядка $|h| > 0$ через производные этих функций более низкого порядка и производную D^hA. Таким образом, соотношения (1.4)–(1.10) представляют собой рекуррентную процедуру для нахождения производных D^hC, D^hC^{-1} и $D^hb_i^{kl}(t)$ для любого h с использованием производных $D^{h_1}A$ порядка $|h_1| < |h|$ и $h_1 = h$.

Вычислив все производные D^hC, D^hC^{-1} и $D^hb_i^{kl}(t)$ порядка $|h| \leqslant s$, искомые функции можно найти приближенно: $C = \widetilde{C} + o(\|p - p_0\|^s)$, $C^{-1} = \widetilde{C}^{-1} + o(\|p-p_0\|^s)$, $b_i^{kl}(t) = \widetilde{b}_i^{kl}(t) + o(\|p-p_0\|^s)$, где $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}^{-1}$ и $\widetilde{b}_i^{kl}(t)$ — усеченные ряды Тейлора, содержащие члены с производными D^h порядка $|h| \leqslant s$, $\|p\|$ — норма в $\mathbb{C}^m$. С использованием этих приближений семейство A может быть представлено в виде $A = \widetilde{C}A'(\widetilde{\varphi}(p))\widetilde{C}^{-1} + o(\|p-p_0\|^s)$, т. е. рекуррентная процедура позволяет привести произвольное семейство матриц $A(p)$ к нормальной форме в окрестности точки $p = p_0$ с точностью до величин любого наперёд заданного порядка малости.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим однопараметрическое семейство матриц $A(z)$ размера 3×3, имеющее в точке $z = 0$ собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, которым соответствуют жордановы клетки размеров $n_1(\lambda_1) = 2$, $n_1(\lambda_2) = 1$:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 2i+z & -8z & z^2 \\ 2iz & 4iz & 1-iz^2 \\ 2z^2 & -2z & z^2 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма J матрицы $A_0 = A(0)$ и приводящие к ней матрицы C_0, C_0^{-1} имеют вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При первой итерации (для $h = 1$, $D^h = d/dz$) получим

$$F = \begin{pmatrix} f_{11}(1,1) & f_{11}(1,2) & f_{12}(1,1) \\ f_{11}(2,1) & f_{11}(2,2) & f_{12}(2,1) \\ f_{21}(1,1) & f_{21}(1,2) & f_{22}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i & 0 & 2i \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -4i & 0 & -2i \\ 0 & 4i & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4i & 0 & 0 \\ -4i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

По этим матрицам определяются первые производные искомых функций, которые далее используются при второй итерации для нахождения производных $D^h = d^2/dz^2$. В результате нормальная форма $A'(p')$ семейства $A(z)$ и найденные по теореме 1 функции $p' = \varphi(z)$, $C(z)$, $C^{-1}(z)$ (с точностью до $o(z^2)$) имеют вид

$$A'(p') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_1(2) & b_1(1) & 0 \\ 0 & 0 & 2i + b_2(1) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} b_1(1) &= 4iz + 9z^2 + o(z^2), \\ b_1(2) &= -2z + o(z^2), \\ b_2(1) &= z - 8z^2 + o(z^2), \end{aligned}$$

$$C(z) = \begin{pmatrix} -4iz + (2-2i)z^2 & -2z - (5+1{,}5i)z^2 & 1 \\ 1 & 0 & z + (2+0{,}5i)z^2 \\ -4iz - 8z^2 & 1 + 5iz^2 & 0 \end{pmatrix} + o(z^2),$$

$$C^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -z-(2+0{,}5i)z^2 & 1-4iz^2 & -2z^2 \\ -4iz^2 & 4iz+8z^2 & 1-5iz^2 \\ 1-4iz^2 & 4iz-(2-10i)z^2 & 2z+(5+1{,}5i)z^2 \end{pmatrix} + o(z^2).$$

Определение 3. Централизатором квадратной матрицы X называется множество матриц, коммутирующих с X:

$$Z_X = \{Y\colon\ [X,Y]=0\},$$

где $[X,Y] = XY - YX$ [1–3].

Централизатор Z_J жордановой матрицы J состоит из блочно-диагональных матриц $Y = \mathrm{Diag}(Y_1, Y_2, \dots)$, блоки Y_i которых соответствуют блокам J_i и имеют вид, изображённый на рис. 4 [1–3]. На рис. 4 каждый косой отрезок обозначает ряд одинаковых чисел, а на незаполненных местах подразумеваются нули. Централизатор Z_J является плоскостью в пространстве всех матриц $\mathbb{C}^{n^2}$, проходящей через нулевую и единичную матрицы.

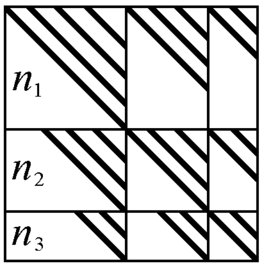


Рис. 4. Блок матрицы, коммутирующей с жордановой матрицей J

Лемма 1. *Для любой матрицы X и любых i,k,l,t верно равенство*

$$\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)[J,X] = 0.$$

Доказательство. Для любой матрицы $Y \in Z_J$ имеем

$$\mathrm{Tr}([J,X]Y) = \mathrm{Tr}(JXY - XJY) = \mathrm{Tr}(YJX - JYX) = -\mathrm{Tr}([J,Y]X) = 0. \tag{1.11}$$

Взяв в качестве Y матрицу, у которой на t-м, начиная с наибольшего, косом отрезке блока Y_i^{lk} (см. рис. 4) стоят единицы, а на остальных местах — нули, из (1.11) получим $0 = \mathrm{Tr}([J,X]Y) = \mathrm{Tr}_i^{kl}(t)[J,X]$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой матрицы G, удовлетворяющей при всех i,k,l,t условию $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)G = 0$, уравнение*

$$[J,X] = G \tag{1.12}$$

имеет единственное решение (1.7), (1.8) *среди матриц X, удовлетворяющих при всех i,k,l,s условиям*

$$\begin{aligned} x_{ii}^{kl}(1,s) &= 0, \quad k \leqslant l, \\ x_{ii}^{kl}(s, n_l(\lambda_i)) &= 0, \quad k > l. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Доказательство. В случае, когда G — нулевая матрица, множеством решений уравнения $[J,X]=0$ является централизатор Z_J. Условия (1.13) для $X \in Z_J$ означают равенство нулю элементов, стоящих на s-м (снизу для $k \leqslant l$ и сверху для $k > l$) косом отрезке блока X_i^{kl} (см. рис. 4). Отсюда уравнение $[J,X]=0$ имеет единственное решение $X=0$ среди матриц, удовлетворяющих всем условиям (1.13). В силу линейности уравнений, если матрицы X_1 и X_2 являются решениями (1.12), (1.13) при ненулевой матрице G, то матрица $X = X_1 - X_2$ удовлетворяет уравнениям $[J,X]=0$ и (1.13). Из доказанного выше следует, что $X = X_1 - X_2 = 0$, то есть если уравнения (1.12), (1.13) имеют решение, то оно единственное.

Подставив в (1.12) явный вид матрицы J, получим уравнения для элементов матрицы X:

$$(\lambda_i - \lambda_j) x_{ij}^{kl}(r,s) + x_{ij}^{kl}(r+1,s) - x_{ij}^{kl}(r,s-1) = g_{ij}^{kl}(r,s), \tag{1.14}$$

где если элемент x_{ij}^{kl} с координатами $(r+1,s)$ или $(r,s-1)$ выходит за пределы блока X_{ij}^{kl}, вместо него берется нуль. То, что (1.7), (1.8) являются решением (1.12), (1.13), можно проверить непосредственной подстановкой (1.7), (1.8) в (1.13), (1.14). При этом уравнения для $i=j$, $r=n_k(\lambda_i)$, $s=n_l(\lambda_i)-t+1$ при $k \leqslant l$ и для $i=j$, $r=t$, $s=1$ при $k>l$ примут вид $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)G=0$. Они удовлетворяются в силу условия леммы. Остальные уравнения удовлетворяются тождественно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Возьмём производную D^h, $|h|>0$, от обеих частей тождества $CC^{-1}=E$:

$$\sum_{h_1+h_2=h} C_h^{h_1h_2} D^{h_1}C\, D^{h_2}C^{-1} = 0, \quad C_h^{h_1h_2} = \prod_{i=1}^m \frac{h^i!}{h_1^i!h_2^i!}.$$

Перенеся все слагаемые, кроме $C_0 D^h C^{-1}$, в правую часть и затем умножив обе части равенства слева на C_0^{-1}, докажем пункт (iii) теоремы.

Возьмем производную D^h от обеих частей равенства (1.2):

$$D^hA = \sum_{h_1+h_2+h_3=h} C_h^{h_1h_2h_3} D^{h_1}C\, D^{h_2}A' D^{h_3}C^{-1}, \quad C_h^{h_1h_2h_3} = \prod_{i=1}^m \frac{h^i!}{h_1^i!h_2^i!h_3^i!}.$$

Выразим $C_0 D^h A' C_0^{-1}$ через остальные слагаемые и умножим обе части равенства на C_0^{-1} и C_0 слева и справа соответственно:

$$D^hA' = C_0^{-1} D^h A C_0 - C_0^{-1} \sum_{\substack{h_1+h_2+h_3=h \\ h_2 \neq h}} C_h^{h_1h_2h_3} D^{h_1}C\, D^{h_2}A' D^{h_3}C^{-1}\, C_0.$$

Воспользовавшись уже доказанным соотношением (1.10) для слагаемого, содержащего D^hC^{-1}, получим

$$D^hA' = [J, C_0^{-1}D^hC] + F, \tag{1.15}$$

где матрица F определена в (1.5). Используя лемму 1 и учитывая, что $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)D^hA' = \mathrm{Tr}_i^{kl}(t)D^hB = \alpha_i^{kl}(t)D^hb_i^{kl}(t)$ при $|h| > 0$, докажем пункт (i) теоремы.

Перегруппировав (1.15), получим

$$[J, C_0^{-1}D^hC] = G, \tag{1.16}$$

где матрица G определена в (1.9). Заметим, что $C_0^{-1}D^hC = D^h(C_0^{-1}C)$ — производная семейства $C_J = C_0^{-1}C$, $C_J(p_0) = E$, приводящего семейство $A_J = C_0^{-1}AC_0$ к нормальной форме, т. е.

$$A_J = C_0^{-1}AC_0 = C_0^{-1}CA'(\varphi(p))C^{-1}C_0 = C_JA'(\varphi(p))C_J^{-1}.$$

В точке $p = p_0$ матрица $A_J(p_0) = C_0^{-1}A_0C_0 = J$ имеет жорданову форму. Из доказательства теоремы о версальных деформациях [1–3] следует, что в этом случае семейство C_J может быть выбрано лежащим на произвольной поверхности размерности $n^2 - d$ в пространстве всех матриц, которая проходит через единичную матрицу и трансверсальна в этой точке к централизатору Z_J. Для каждой такой поверхности семейство C_J может быть выбрано единственным образом. В частности, такой поверхностью является плоскость $E + \Pi$, где Π — множество матриц X, удовлетворяющих условиям (1.13). Плоскости Z_J и $E + \Pi$ трансверсальны, так как единственной матрицей из Z_J, удовлетворяющей условиям (1.13), (пересечением плоскостей) является единичная матрица E, а сумма размерностей плоскостей равна размерности всего пространства n^2. Выбрав плоскость $E+\Pi$ для определения C_J, получим, что все производные $D^hC_J = C_0^{-1}D^hC = X$ удовлетворяют условиям (1.13), которые играют роль условий нормировки. Тогда соотношения пункта (ii) теоремы следуют из леммы 2, применённой к уравнению (1.16) (условия $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)G = \mathrm{Tr}_i^{kl}(t)D^hA' - \mathrm{Tr}_i^{kl}(t)F = \alpha_i^{kl}(t)D^hb_i^{kl}(t) - \mathrm{Tr}_i^{kl}(t)F = 0$ выполнены в силу (1.4)). Теорема доказана.

Замечание 1. В качестве условий нормировки вместо (1.13) можно взять такое же количество любых других линейно независимых однородных уравнений, которым удовлетворяет только нулевая матрица из Z_J. При этом теорема 1 и лемма 2 будут верны, если в соответствии с новыми условиями нормировки изменить соотношения (1.8), решив уравнения (1.14) для $i = j$, определяющие элементы блоков X_{ii}.

Замечание 2. Случай семейства комплексных матриц $A(p)$, зависящих от вектора вещественных параметров $p \in \mathbb{R}^m$, ничем не отличается от рассмотренного выше, за исключением того, что голоморфная зависимость от параметров сменяется гладкой. При этом теорема 1 верна и позволяет находить производные D^h функций C, C^{-1} и $b_i^{kl}(t)$ порядка $|h| \leqslant s$, где s — порядок гладкости семейства $A(p)$.

§ 2. Семейства вещественных матриц

В настоящем параграфе исследуются семейства вещественных матриц $A\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, $P \subset \mathbb{R}^m$, гладко зависящих от вектора вещественных параметров. Рассмотрим семейство вещественных матриц $A(p)$, $p \in \mathbb{R}^m$, определённое в окрестности точки $p = p_0$. Пусть матрица $A_0 = A(p_0)$ имеет вещественные собственные значения λ_i, $i = 1, \dots, q$, и комплексные собственные значения λ_i, $\overline{\lambda_i}$, $i = q+1, q+2, \dots$ (черта обозначает операцию комплексного сопряжения). Тогда жорданова форма матрицы A_0 имеет вид $J = \mathrm{Diag}(J_1, \dots, J_q, J_{q+1}, \overline{J_{q+1}}, J_{q+2}, \overline{J_{q+2}}, \dots)$, где блоки J_i соответствуют собственным значениям λ_i и имеют вид $J_i = \mathrm{Diag}(J_i^1, J_i^2, \dots)$, где J_i^k — жордановы блоки размеров $n_k(\lambda_i)$, упорядоченные начиная с наибольшего.

Произвольная матрица X порядка $n \times n$ разбивается на блоки X_{ijA}^{kl}, X_{ijB}^{kl}, X_{ijC}^{kl}, X_{ijD}^{kl}, находящиеся на пересечении строк и столбцов блоков J_i^k и J_j^l, J_i^k и $\overline{J_j^l}$, $\overline{J_i^k}$ и J_j^l, $\overline{J_i^k}$ и $\overline{J_j^l}$ соответственно. Обобщённый след $\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)X$ определяется так же, как в § 1, за исключением того, что вместо элементов блока X_{ii}^{kl} берутся элементы блока X_{iiA}^{kl}:

$$\mathrm{Tr}_i^{kl}(t)X = \sum_{r=t}^{n'} x_{iiA}^{kl}(n_k(\lambda_i) - n' + r,\ r - t + 1), \quad n' = \min(n_k(\lambda_i), n_l(\lambda_i)).$$

Обозначим через $\mathrm{Rl}\,Y$ овеществление комплексной матрицы Y [3]:

$$\mathrm{Rl}\,Y = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,Y & -\mathrm{Im}\,Y \\ \mathrm{Im}\,Y & \mathrm{Re}\,Y \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу $J_R = \mathrm{Diag}(J_1, \dots, J_q, \mathrm{Rl}\,J_{q+1}, \mathrm{Rl}\,J_{q+2}, \dots)$ — вещественный эквивалент жордановой формы. Матрицы J_R и J связаны соотношением $J_R = RJR^{-1}$, где $R = \mathrm{Diag}(E_1, \dots, E_q, I_{q+1}, I_{q+2}, \dots)$, $R^{-1} = \overline{R} = \mathrm{Diag}(E_1, \dots, E_q, \overline{I_{q+1}}, \overline{I_{q+2}}, \dots)$. Блоки I_j имеют вид

$$I_j = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} E_j & -iE_j \\ -iE_j & E_j \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где E_j — единичная матрица такого же размера, как J_j. Выберем матрицу C_0, приводящую A_0 к J (1.1), так, чтобы матрица $C_{R0} = C_0R^{-1}$, и следовательно матрица $C_{R0}^{-1} = RC_0^{-1}$, была вещественной. Для этого достаточно выбрать матрицу C_0 так, чтобы её столбцы, соответствующие блокам вещественных собственных значений J_j, $j = 1, \dots, q$, были вещественными, а столбцы, соответствующие блокам комплексно сопряженных собственных значений J_j и $\overline{J_j}$, $j = q+1, q+2, \dots$, — комплексно сопряжёнными (это возможно в силу вещественности A_0). Тогда каждый столбец матрицы C_{R0} будет равен сумме вещественной и мнимой части соответствующего столбца матрицы C_0. При помощи C_{R0} матрица A_0 приводится к форме J_R:

$$A_0 = C_0JC_0^{-1} = C_{R0}J_RC_{R0}^{-1}.$$

В [3, 4] показано, что вещественная миниверсальная деформация $A'_R(p')$, $p' \in \mathbb{R}^d$, к которой при помощи семейств невырожденных вещественных матриц $C_R(p)$, $C_R^{-1}(p)$ и гладкой замены параметров $p' = \varphi(p)$, $\varphi(p_0) = \mathbf{0}$ приводится любое семейство вещественных матриц $A(p)$, $A(p_0) = A_0$ (1.2), можно выбрать в виде $A'_R(p') = J_R + B_R(p')$, $B_R = \mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_q, \mathrm{Rl}\, B_{q+1}, \mathrm{Rl}\, B_{q+2}, \dots)$. Здесь B_j — блок, соответствующий блоку J_j и содержащий на отмеченных на рис. 3 (а, б или в) местах в случаях $j = 1, \dots, q$ независимые вещественные параметры $b_j^{kl}(t)_a$, а в случаях $j = q+1, q+2, \dots$ — комплексные числа $b_j^{kl}(t) = b_j^{kl}(t)_a + i b_j^{kl}(t)_b$, где $b_j^{kl}(t)_a$ и $b_j^{kl}(t)_b$ — независимые вещественные параметры. Нумерация параметров $b_j^{kl}(t)_a$, $b_j^{kl}(t)_b$ проводится так же, как в § 1. Введя семейства $C = C_R R$, $C^{-1} = R^{-1} C_R^{-1}$, $A' = J + B$, $B = \mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_q, B_{q+1}, \overline{B_{q+1}}, B_{q+2}, \overline{B_{q+2}}, \dots)$ и используя соотношение $A'_R = J_R + B_R = R(J+B)R^{-1} = RA'R^{-1}$, получим

$$A(p) = C_R(p) A'_R(\varphi(p)) C_R^{-1}(p) = C(p) A'(\varphi(p)) C^{-1}(p). \tag{2.1}$$

Семейство $A'(p')$ имеет такую же структуру, что и комплексная миниверсальная деформация в § 1. Это семейство, как и $A'_R(p')$, является миниверсальной деформацией, к которой в окрестности $p = p_0$ можно привести любое семейство вещественных матриц $A(p)$, $A(p_0) = A_0$, однако оно, а также семейства C, C^{-1}, содержат комплексные элементы. Для производных D^h функций $p' = \varphi(p)$, $C(p)$ и $C^{-1}(p)$, приводящих семейство $A(p)$ к виду $A'(p')$, верны соотношения теоремы 1, если положить $b_j^{kl}(t) = b_j^{kl}(t)_a$ при $j \leqslant q$ и $b_j^{kl}(t) = b_j^{kl}(t)_a + i b_j^{kl}(t)_b$ при $j > q$. Используя соотношения $C_R = CR^{-1}$, $C_R^{-1} = RC^{-1}$ и теорему 1, аналогичные соотношения можно получить для производных $D^h C_R$, $D^h C_R^{-1}$, $D^h b_j^{kl}(t)_a$ и $D^h b_j^{kl}(t)_b$.

Теорема 2. *В принятых обозначениях верны следующие соотношения для производных D^h, $|h| > 0$, функций $C_R(p)$, $C_R^{-1}(p)$, $b_j^{kl}(t)_a(p)$ и $b_j^{kl}(t)_b(p)$, приводящих семейство вещественных матриц $A(p)$ к вещественной миниверсальной деформации $A'_R(p')$ описанного выше вида (2.1):*

(i)
$$D^h b_j^{kl}(t)_a = \mathrm{Re}\, \frac{\mathrm{Tr}_j^{kl}(t)(R^{-1} F_R R)}{\alpha_j^{kl}(t)}, \quad D^h b_j^{kl}(t)_b = \mathrm{Im}\, \frac{\mathrm{Tr}_j^{kl}(t)(R^{-1} F_R R)}{\alpha_j^{kl}(t)},$$

$$F_R = C_{R0}^{-1} \Biggl(D^h A - \sum_{\substack{h_1+h_2+h_3=h \\ h_1,h_2,h_3 \neq h}} C_h^{h_1 h_2 h_3} D^{h_1} C_R\, D^{h_2} A'_R\, D^{h_3} C_R^{-1} + {} + A_0 \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \neq h}} C_h^{h_1 h_2} D^{h_1} C_R\, D^{h_2} C_R^{-1} \Biggr) C_{R0},$$

(ii)
$$D^h C_R = C_{R0} R X R^{-1},$$
$$G = R^{-1}(D^h A'_R - F_R) R,$$

(iii) $$D^h C_R^{-1} = -C_{R0}^{-1} \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_2 \neq h}} C_h^{h_1 h_2} D^{h_1} C_R \, D^{h_2} C_R^{-1}.$$

Здесь элементы блоков X_{iiA}^{kl} и X_{iiD}^{kl} выражаются соответственно через элементы блоков G_{iiA}^{kl} и G_{iiD}^{kl} по формулам (1.8), *а элементы остальных блоков матрицы X выражаются через элементы соответствующих блоков матрицы G по формулам* (1.7). *Во втором случае необходимо учесть, что в соответствии с обозначениями* § 1 *комплексно сопряжённые собственные значения λ_i, $\overline{\lambda_i}$ рассматриваются отдельно* (*например, чтобы получить формулу для элементов блока X_{ijC}^{kl}, необходимо заменить в* (1.7) $(\lambda_i - \lambda_j)$ *на* $(\overline{\lambda_i} - \lambda_j)$ *и* $g_{ij}^{kl}(r_1, s_1)$ *на* $g_{ijC}^{kl}(r_1, s_1)$).

Доказательство. Подставив соотношения $C = C_R R$, $C^{-1} = R^{-1} C_R^{-1}$ и $A' = R^{-1} A'_R R$ в выражения (1.5), (1.6), (1.9), получим

$$F = R^{-1} F_R R, \tag{2.2}$$

$$D^h C_R = C_{R0} R X R^{-1}, \tag{2.3}$$

$$G = R^{-1}(D^h A'_R - F_R) R. \tag{2.4}$$

Как было отмечено выше, соотношение (1.4) теоремы 1 верно, если положить $b_j^{kl}(t) = b_j^{kl}(t)_a$, $j \leqslant q$, и $b_j^{kl}(t) = b_j^{kl}(t)_a + i b_j^{kl}(t)_b$, $j > q$. Отсюда производные $D^h b_j^{kl}(t)_a$ и $D^h b_j^{kl}(t)_b$ можно найти, взяв вещественную и мнимую части соответствующего обобщённого следа матрицы F (2.2). Это доказывает пункт (i) теоремы.

Пункт (ii) непосредственно следует из (2.3), (2.4) и теоремы 1. То, что матрица $D^h C_R$ получится при этом вещественной, следует из следующих соображений. Элементы матрицы $G = R^{-1} G_R R$, где $G_R = D^h A'_R - F_R$ — вещественная матрица, имеют свойства $g_{ijA}^{kl}(r,s) = \overline{g_{ijD}^{kl}(r,s)}$, $g_{ijB}^{kl}(r,s) = \overline{g_{ijC}^{kl}(r,s)}$. Можно показать, что полученная из G матрица X также обладает этими свойствами. Остаётся заметить, что тогда матрица RXR^{-1}, и следовательно матрица $D^h C_R = C_{R0} R X R^{-1}$, будет вещественной.

Для доказательства оставшегося пункта (iii) достаточно подставить соотношения $C = C_R R$ и $C^{-1} = R^{-1} C_R^{-1}$ в (1.10). Теорема доказана.

Для производных нулевого порядка $h = \mathbf{0}$ имеем $D^0 A'_R = J_R$, $D^0 C_R = C_{R0}$, $D^0 C_R^{-1} = C_{R0}^{-1}$. Рекуррентные соотношения теоремы 2 позволяют найти производные D^h вещественных функций C_R, C_R^{-1}, φ, приводящих семейство $A(p)$ к вещественной нормальной форме $A'_R(p')$. При помощи этих производных семейство $A(p)$ приводится к нормальной форме с точностью до $o(\|p - p_0\|^s)$, где s — любое наперёд заданное число.

Пример 2. Рассмотрим однопараметрическое семейство вещественных матриц $A(x)$ размера 4×4, имеющее в точке $x = 0$ пару комплексно сопряжённых собственных значений $\lambda = 1 + i$, $\overline{\lambda} = 1 - i$, которым соответствуют жордановы клетки размера $n(\lambda) = 2$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-4x^2 & 1+x & 2x^2 & 1 \\ -1+2x & 1-x & 1-2x^2 & 3x+2x^2 \\ 2x^2 & 2x^2 & 1-2x & -1+x \\ -x & 3x & 1+4x^2 & 1+x \end{pmatrix}.$$

Нормальные формы $A'(p')$ и $A'_R(p')$ этого семейства и найденная по теореме 2 функция $p' = \varphi(x)$ (с точностью до $o(x^2)$) имеют вид

$$A'_R(p') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ b(2)_a & 1+b(1)_a & -b(2)_b & -1-b(1)_b \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ b(2)_b & 1+b(1)_b & b(2)_a & 1+b(1)_a \end{pmatrix},$$

$$A'(p') = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ b(2) & 1+i+b(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & \overline{b(2)} & 1-i+\overline{b(1)} \end{pmatrix},$$

$$b(1) = b(1)_a + ib(1)_b = -x - 2x^2 + i\left(-x - \frac{21}{8}x^2\right) + o(x^2),$$

$$b(2) = b(2)_a + ib(2)_b = -\frac{x}{2} + \frac{25}{8}x^2 + i\left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}x^2\right) + o(x^2).$$

§ 3. Приложение к теории устойчивости

В качестве приложения версальных деформаций к теории устойчивости рассмотрим задачу об исследовании области устойчивости семейства действительных $n \times n$ матриц $A(p)$, $p \in \mathbb{R}^m$, в окрестности точки её границы по свойствам семейства в этой точке. Областью устойчивости семейства A называется множество значений вектора параметров p, при которых все собственные значения λ матрицы $A(p)$ имеют отрицательные действительные части, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Граница области устойчивости характеризуется матрицами $A(p)$, имеющими чисто мнимые собственные значения, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, когда для остальных собственных значений $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Касательным конусом к области устойчивости в точке её границы называется множество направлений векторов e, по которым из данной точки можно выпустить кривую $p(\varepsilon)$, $dp/d\varepsilon\big|_{\varepsilon=0} = e$, $\varepsilon \geqslant 0$, лежащую, за исключением начальной точки, в области устойчивости [5]. Касательный конус является линейным приближением к области устойчивости в окрестности рассматриваемой точки. В работе [5] при помощи миниверсальных деформаций были описаны касательные конусы для некоторых типов граничных точек с точностью до линейного диффеоморфизма. В настоящем параграфе с использованием миниверсальных деформаций и теоремы 1 касательные конусы находятся в пространстве параметров по жордановой форме матрицы A и её первым производным по параметрам в рассматриваемой точке.

Пусть $p = p_0$ — точка границы области устойчивости и $\lambda_0 = 0$, $\lambda_j = i\omega_j \neq 0$, $\overline{\lambda_j} = -i\omega_j$, $j = 1, \ldots, k$, — чисто мнимые собственные значения матрицы $A(p_0)$ (i — мнимая единица).

Теорема 3. *Пусть каждому чисто мнимому собственному значению* λ_0, λ_j, $\overline{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, k$, *матрицы* $A(p_0)$ *соответствует ровно один жорданов блок размера* n_j, $j = 0, \ldots, k$. *Тогда в случае линейной независимости системы векторов* $f(l_1), g_j(l_2), h_j(l_3) \in \mathbb{R}^m$, $l_1 = 1, \ldots, n_0$, $l_2 = 1, \ldots, n_j$, $l_3 = 2, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$, *определённых соотношениями*

$$\begin{gathered} f(l_1) = (\mathrm{Tr}_0^{11}(l_1)F^1, \ldots, \mathrm{Tr}_0^{11}(l_1)F^m)^T, \\ g_j(l_2) = (\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}_j^{11}(l_2)F^1, \ldots, \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}_j^{11}(l_2)F^m)^T, \\ h_j(l_3) = (\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_j^{11}(l_3)F^1, \ldots, \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}_j^{11}(l_3)F^m)^T, \\ F^r = C_0^{-1}\frac{\partial A}{\partial p^r}C_0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

(*производные берутся при* $p = p_0$), *касательный конус к области устойчивости в точке* $p = p_0$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} K = \{e \in \mathbb{R}^m\colon\ & (f(1), e) \leqslant 0,\ (f(2), e) \leqslant 0,\ (f(3), e) = \ldots = (f(n_0), e) = 0, \\ & (g_j(1), e) \leqslant 0,\ (g_j(2), e) \leqslant 0,\ (g_j(3), e) = \ldots = (g_j(n_j), e) = 0, \\ & (h_j(2), e) = \ldots = (h_j(n_j), e) = 0,\ j = 1, \ldots, k\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $(x, y) = x^1y^1 + \ldots + x^my^m$ — *скалярное произведение в* $\mathbb{R}^m$. *В случае, когда среди чисто мнимых собственных значений нет нуля, из* (3.2) *необходимо исключить соотношения, содержащие векторы* $f(l)$.

Для доказательства теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 3. *Касательный конус к области устойчивости семейства многочленов* $x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n$ *в точке* $a_1 = \ldots = a_n = 0$ *в пространстве параметров* $p = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ *равен множеству* $\{a_1 \leqslant 0,\ a_2 \leqslant 0,\ a_3 = \ldots = a_n = 0\}$.

Лемма 4. *Касательный конус к области устойчивости семейства многочленов* $z^n - (a_1 + ib_1)z^{n-1} - \ldots - (a_n + ib_n)$ *в точке* $a_1 = b_1 = \ldots = a_n = b_n = 0$ *в пространстве параметров* $p = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ *равен множеству* $\{a_1 \leqslant 0,\ b_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \leqslant 0,\ b_2 = a_3 = \ldots = a_n = b_n = 0\}$.

Леммы 3, 4 были сформулированы и доказаны в [5].

Многочлен называется устойчивым, если вещественные части всех его корней отрицательны.

Лемма 5. *Для любых* $\alpha_1^j \leqslant 0$, $\alpha_2^j \leqslant 0$, $j = 0, \ldots, k$, *существует кривая* $q_1(\varepsilon)$, $q_1(0) = \mathbf{0}$, *в пространстве* $q_1 = (a_{l_1}^{j_1}, b_{l_2}^{j_2},\ l_2 \neq 1)^T$ *всех коэффициентов (кроме* $b_1^1, \ldots, b_1^k$) *многочленов*

$$\begin{gathered} x^{n_0} - a_1^0x^{n_0-1} - \ldots - a_{n_0}^0, \\ z^{n_j} - (a_1^j + ib_1^j)z^{n_j-1} - \ldots - (a_{n_j}^j + ib_{n_j}^j), \quad j = 1, \ldots, k, \end{gathered} \tag{3.3}$$

такая что многочлены (3.3) *устойчивы при* $\varepsilon > 0$, *причём вектор коэффициентов* $q_2 = (b_1^1, \dots, b_1^k)^T$ *определяется произвольной наперёд заданной гладкой функцией* $q_2 = Q_2(q_1, \varepsilon)$, $Q_2(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$, *и выполняются условия*

$$\begin{gathered}\frac{da_1^j}{d\varepsilon} = \alpha_1^j,\ \frac{da_2^j}{d\varepsilon} = \alpha_2^j,\ \frac{da_3^j}{d\varepsilon} = \ldots = \frac{da_{n_j}^j}{d\varepsilon} = 0, \quad j = 0, \dots, k \\ \frac{db_2^j}{d\varepsilon} = \ldots = \frac{db_{n_j}^j}{d\varepsilon} = 0, \quad j = 1, \dots, k.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлены вида

$$\begin{gathered}(x + \varepsilon^2)^{n_0 - 2}(x^2 + (-\alpha_1^0\varepsilon + \varepsilon^2)x - \alpha_2^0\varepsilon + \varepsilon^2), \\ (z + \varepsilon^2)^{n_j - 2}(z^2 + (-(\alpha_1^j + ib_1^j)\varepsilon + \varepsilon^2)z - \alpha_2^j\varepsilon + \varepsilon^2).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Эти многочлены устойчивы при $\varepsilon > 0$, а их коэффициенты, полученные после раскрытия скобок, удовлетворяют условиям (3.4). Выразив эти коэффициенты через $q_2 = (b_1^1\varepsilon, \dots, b_1^k\varepsilon)^T$ и ε и затем подставив полученные выражения в соотношение $q_2 = Q_2(q_1, \varepsilon)$, получим $q_2 = Q_2'(q_2, \varepsilon)$. При этом матрица производных $\partial Q_2'/\partial q_2 = \mathbf{0}$ при $\varepsilon = 0$. Отсюда по теореме о неявной функции в окрестности $\varepsilon = 0$ вектор q_2 является гладкой функцией $q_2 = Q_2''(\varepsilon)$. Подставим функцию $Q_2''(\varepsilon)$ в (3.5) вместо $q_2 = (b_1^j\varepsilon)^T$. Тогда коэффициенты многочленов (3.5) составят искомую кривую $q_1 = q_1(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Характеристическое уравнение матрицы $A(p)$ в окрестности точки p_0 с учётом (1.2) имеет вид

$$\det(A(p) - \lambda E) = \det(C(p)A'(\varphi(p))C^{-1}(p) - \lambda E) = \det(A'(\varphi(p)) - \lambda E) = 0,$$

где $A'(p')$ — миниверсальная деформация матрицы $A(p_0)$. Следовательно, устойчивость матрицы $A(p)$ эквивалентна устойчивости матрицы $A'(\varphi(p))$ и в силу блочно-диагональной структуры A' эквивалентна одновременной устойчивости всех её блоков. Блоки, отвечающие собственным значениям матрицы A_0 с отрицательной вещественной частью, являются устойчивыми в точке p_0 и, следовательно, в некоторой её окрестности. Поэтому устойчивость в окрестности p_0 определяется устойчивостью блоков $A_0', A_j', \overline{A_j'}$, $j = 1, \dots, k$, соответствующих чисто мнимым собственным значениям, или, так как блоки A_j' и $\overline{A_j'}$ устойчивы или неустойчивы одновременно (как комплексно сопряжённые, см. § 2), устойчивостью блоков A_0', A_j', $j = 1, \dots, k$. Взяв в качестве A_0', A_j' блоки первого типа (рис. 2а), запишем их характеристические уравнения:

$$\begin{aligned}\det(A_0' - \lambda E) &= \lambda^{n_0} - b_0^{11}(1)_a\lambda^{n_0 - 1} - \ldots - b_0^{11}(n_0)_a = 0, \\ \det(A_j' - \lambda E) &= \eta^{n_j} - (b_j^{11}(1)_a + ib_j^{11}(1)_b)\eta^{n_j - 1} - \ldots - \\ &\quad - (b_j^{11}(n_j)_a + ib_j^{11}(n_j)_b) = 0, \quad \eta = \lambda - i\omega_j, \quad j = 1, \dots, k,\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $b_0^{11}(l_1)_a, b_j^{11}(l_2)_a, b_j^{11}(l_3)_b$ — параметры миниверсальной деформации, гладко зависящие от p. По теореме 1 с учётом (3.1) получим

$$\nabla b_0^{11}(l_1)_a = f(l_1), \quad \nabla b_j^{11}(l_2)_a = g_j(l_2), \quad \nabla b_j^{11}(l_3)_b = h_j(l_3), \tag{3.7}$$
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial p^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p^m}\right)^T.$$

Рассмотрим произвольную гладкую кривую $p = p(\varepsilon)$ с направлением $e = dp/d\varepsilon$. Тогда коэффициенты многочленов (3.6) вдоль кривой имеют вид

$$\begin{aligned} b_0^{11}(l_1)_a(\varepsilon) &= (f(l_1), e)\varepsilon + O(\varepsilon^2),\\ b_j^{11}(l_2)_a(\varepsilon) &= (g_j(l_2), e)\varepsilon + O(\varepsilon^2),\\ b_j^{11}(l_2)_b(\varepsilon) &= (h_j(l_2), e)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Применяя леммы 3, 4 к полиномам (3.6) с учётом (3.8), получим, что для того чтобы кривая $p(\varepsilon)$ лежала в области устойчивости, необходимо выполнение условий (3.2).

Докажем достаточность условий (3.2). Обозначим через q вектор с элементами $b_0^{11}(l_1)_a, b_j^{11}(l_2)_a, b_j^{11}(l_3)_b$, а через q_1, q_2 — его части так, что $q_2 = (b_1^{11}(1)_b, \dots, b_k^{11}(1)_b)^T$, а q_1 состоит из оставшихся $d' = n_0 + 2n_1 + \dots + 2n_k - k$ компонент вектора q. Векторы q, q_1 и q_2 связаны с p гладкими функциями $q = Q(p)$, $q_1 = Q_1(p)$ и $q_2 = Q_2(p)$, являющимися частью отображения $p' = \varphi(p)$. Матрица Якоби dQ_1/dp состоит из строк $f(l_1)$, $g_j(l_2)$, $h_j(l_3)$, $l_3 \neq 1$, которые по условию составляют линейно независимую систему. Пусть p_1 — вектор, состоящий из d' компонент вектора p, которым соответствует линейно независимая система столбцов этой матрицы, а вектор p_2 содержит оставшиеся компоненты. Тогда $\det[dQ_1/dp_1] \neq 0$ в точке $p = p_0$, и по теореме о неявной функции $p_1 = P_1(q_1, p_2)$ в окрестности точки $p = p_0$, $q_1 = \mathbf{0}$. Подставив это соотношение в $q_2 = Q_2(p_1, p_2)$, получим $q_2 = Q_2'(q_1, p_2)$. Рассмотрим произвольное направление e, удовлетворяющее условиям (3.2), и положим $p_2 = e_2\varepsilon$, где e_1 и e_2 — части вектора e, относящиеся к p_1 и p_2 соответственно. Тогда $q_2 = Q_2'(q_1, e_2\varepsilon) = Q_2''(q_1, \varepsilon)$. По лемме 5 существует кривая $q_1 = q_1(\varepsilon)$, такая что $dq_1/d\varepsilon = (\partial Q_1/\partial p)e$, $q_2 = Q_2''(q_1, \varepsilon)$ и все многочлены (3.6) устойчивы при $\varepsilon > 0$ (условия (3.4) леммы выполнены в силу (3.2), (3.8)). Тогда кривая $p = p(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, такая что $p_1 = P_1(q_1(\varepsilon), e_2\varepsilon)$, $p_2 = e_2\varepsilon$, лежит в области устойчивости семейства $A(p)$ и имеет выбранное направление e. Теорема доказана.

В общем случае (при наличии собственных значений с несколькими жордановыми клетками) касательный конус к области устойчивости, вообще говоря, не является произведением прямых и полупрямых, как в (3.2). Изучение общего случая является значительно более сложной задачей. Однако используя подход, применённый в доказательстве теоремы 3, можно найти множества направлений, принадлежащих касательному конусу, для граничной точки произвольного типа.

Теорема 4. *Пусть чисто мнимому собственному значению λ_j, $j = 0, \dots, k$, матрицы $A(p_0)$ соответствуют жордановы блоки размеров $n_1(\lambda_j) \geqslant \geqslant n_2(\lambda_j) \geqslant \dots$ Тогда в случае линейной независимости системы векторов*

$f^{rs}(l_1), g_j^{rs}(l_2), h_j^{rs}(l_3) \in \mathbb{R}^m$, *$r \geqslant s$ и $l_3 \neq 1$ при $r = s$, определённых соотношениями*

$$
\begin{gathered}
f^{rs}(l_1) = (\operatorname{Tr}_0^{rs}(l_1)F^1, \dots, \operatorname{Tr}_0^{rs}(l_1)F^m)^T, \\
g_j^{rs}(l_2) = (\operatorname{Re}\operatorname{Tr}_j^{rs}(l_2)F^1, \dots, \operatorname{Re}\operatorname{Tr}_j^{rs}(l_2)F^m)^T, \\
h_j^{rs}(l_3) = (\operatorname{Im}\operatorname{Tr}_j^{rs}(l_3)F^1, \dots, \operatorname{Im}\operatorname{Tr}_j^{rs}(l_3)F^m)^T, \\
F^r = C_0^{-1}\frac{\partial A}{\partial p^r}C_0,
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

где производные берутся при $p = p_0$, множество

$$
\begin{aligned}
K_1 = \{e \in \mathbb{R}^m :& \\
&(f^{rr}(1), e) \leqslant 0,\ (f^{rr}(2), e) \leqslant 0,\ (f^{rr}(3), e) = \ldots = (f^{rr}(n_r(\lambda_0)), e) = 0, \\
&(g_j^{rr}(1), e) \leqslant 0,\ (g_j^{rr}(2), e) \leqslant 0,\ (g_j^{rr}(3), e) = \ldots = (g_j^{rr}(n_r(\lambda_j)), e) = 0, \\
&(h_j^{rr}(2), e) = \ldots = (h_j^{rr}(n_r(\lambda_j)), e) = 0, \\
&(f^{rs}(l_1), e) = (g_j^{rs}(l_2), e) = (h_j^{rs}(l_2), e) = 0,\ r > s,\ j = 1, \dots, k\}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

принадлежит касательному конусу к области устойчивости в точке p_0. Аналогично в случае линейной независимости системы векторов (3.9) для $r \leqslant s$ и $l_3 \neq 1$ при $r = s$ множество

$$
\begin{aligned}
K_2 = \{e \in \mathbb{R}^m :& \\
&(f^{rr}(1), e) \leqslant 0,\ (f^{rr}(2), e) \leqslant 0,\ (f^{rr}(3), e) = \ldots = (f^{rr}(n_r(\lambda_0)), e) = 0, \\
&(g_j^{rr}(1), e) \leqslant 0,\ (g_j^{rr}(2), e) \leqslant 0,\ (g_j^{rr}(3), e) = \ldots = (g_j^{rr}(n_r(\lambda_j)), e) = 0, \\
&(h_j^{rr}(2), e) = \ldots = (h_j^{rr}(n_r(\lambda_j)), e) = 0, \\
&(f^{rs}(l_1), e) = (g_j^{rs}(l_2), e) = h_j^{rs}(l_2), e) = 0,\ r < s,\ j = 1, \dots, k\}
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

принадлежит касательному конусу.

Доказательство. Характеристические уравнения блоков A'_j в рассматриваемом случае нельзя, как в (3.6), выписать в явном виде. Однако если рассматривать кривые $p = p(\varepsilon)$, лежащие на поверхности, определённой уравнениями

$$
b_0^{rs}(l_1)_a(p) = b_j^{rs}(l_2)_a(p) = b_j^{rs}(l_2)_b(p) = 0, \quad r > s, \quad j = 1, \dots, k, \tag{3.12}
$$

то блоки A'_j примут блочно-верхнетреугольный вид, и их характеристические уравнения вдоль кривой запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
\det(A'_0 - \lambda E) &= \prod_r (\lambda^{n_r(\lambda_0)} - b_0^{rr}(1)_a \lambda^{n_r(\lambda_0)-1} - \ldots - b_0^{rr}(n_r(\lambda_0))_a) = 0, \\
\det(A'_j - \lambda E) &= \prod_r (\eta^{n_r(\lambda_j)} - (b_j^{rr}(1)_a + i\, b_j^{rr}(1)_b)\eta^{n_r(\lambda_j)-1} - \ldots - \\
&\qquad - (b_j^{rr}(n_r(\lambda_j))_a + i\, b_j^{rr}(n_r(\lambda_j))_b)) = 0, \quad \eta = \lambda - i\omega_j, \quad j = 1, \dots, k.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

По теореме 1 с учётом (3.9) получим

$$\nabla b_0^{rs}(l_1)_a = f^{rs}(l_1), \quad \nabla b_j^{rs}(l_2)_a = g_j^{rs}(l_2), \quad \nabla b_j^{rs}(l_3)_b = h_j^{rs}(l_3).$$

Следовательно, так как по условию система векторов $f^{rs}(l_1), g_j^{rs}(l_2), h_j^{rs}(l_2)$, $r > s$, линейно независима, по теореме о неявной функции уравнения (3.12) можно разрешить относительно части переменных $p_1 = P_1(p_2)$, где p_1 и p_2 — части вектора p. Тогда коэффициенты многочленов (3.13) зависят только от вектора параметров p_2, и любая кривая $p_1 = P_1(p_2(\varepsilon))$, $p_2 = p_2(\varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям, стоящим в последней строке (3.10). Теперь для доказательства теоремы достаточно найти кривую $p_2 = p_2(\varepsilon)$, имеющую произвольно выбранное направление e_2, такое что вектор e, составленный из $e_1 = (dP_1/dp_2)e_2$ и e_2, удовлетворяет всем условиям (3.10) и все многочлены (3.13) устойчивы вдоль кривой (условия в последней строке в (3.10) выполняются автоматически в силу выбора e_1). Эта задача совпадает с той, что была решена в доказательстве теоремы 3.

Принадлежность множества (3.11) касательному конусу доказывается аналогично. Теорема доказана.

Если каждому чисто мнимому собственному значению соответствует одна жорданова клетка, множества (3.10) и (3.11) совпадают и являются касательным конусом по теореме 3. В теоремах 3 и 4 предлагается конструктивный метод для вычисления касательного конуса к области устойчивости в точке её границы, требующий лишь информации о матрице и её первых производных по параметрам в данной точке.

В случае теоремы 3 для нахождения касательного конуса достаточно привести матрицу $A_0 = A(p_0)$ к жордановой форме (1.1) и найти производные $\partial A/\partial p^r$ в рассматриваемой точке. Заметим, что компоненты векторов (3.1) представляют собой сумму произведений некоторой строки матрицы C_0^{-1} на матрицу $\partial A/\partial p^r$ и на некоторый столбец матрицы C_0. При этом задействованы лишь те столбцы и строки матриц C_0 и C_0^{-1} соответственно, которые отвечают блокам чисто мнимых собственных значений. Этот факт позволяет сократить вычисления при нахождении касательного конуса. Из линейной алгебры известно, что столбцами матрицы C_0, соответствующими блоку A'_j, являются собственный и присоединённые векторы $u_j^0, \dots, u_j^{n_j-1}$ собственного значения λ_j:

$$\begin{aligned} A_0 u_j^0 &= \lambda_j u_j^0, \\ A_0 u_j^1 &= \lambda_j u_j^1 + u_j^0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 u_j^{n_j-1} &= \lambda_j u_j^{n_j-1} + u_j^{n_j-2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда строки матрицы C_0^{-1}, соответствующие тому же блоку, однозначно определяются как следующие в обратном порядке левые собственный и присоединённые векторы $v_j^{n_j-1}, \dots, v_j^0$:

$$\begin{gathered}
v_j^0 A_0 = \lambda_j v_j^0, \\
v_j^1 A_0 = \lambda_j v_j^1 + v_j^0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_j^{n_j-1} A_0 = \lambda_j v_j^{n_j-1} + v_j^{n_j-2},
\end{gathered} \tag{3.15}$$

удовлетворяющие условиям нормировки

$$v_j^0 u_j^{n_j-1} = 1, \quad v_j^l u_j^{n_j-1} = 0, \quad l = 1, \dots, n_j - 1. \tag{3.16}$$

Используя эти свойства матриц C_0 и C_0^{-1}, соотношения (3.1) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
f(l_1) = \left(\sum_{t=0}^{n_0-l_1} v_0^t \frac{\partial A}{\partial p^1} u_0^{n_0-l_1-t}, \dots, \sum_{t=0}^{n_0-l_1} v_0^t \frac{\partial A}{\partial p^m} u_0^{n_0-l_1-t} \right)^T, \\
g_j(l_2) = \left(\mathrm{Re} \sum_{t=0}^{n_j-l_2} v_j^t \frac{\partial A}{\partial p^1} u_j^{n_j-l_2-t}, \dots, \mathrm{Re} \sum_{t=0}^{n_j-l_2} v_j^t \frac{\partial A}{\partial p^m} u_j^{n_j-l_2-t} \right)^T, \\
h_j(l_3) = \left(\mathrm{Im} \sum_{t=0}^{n_j-l_3} v_j^t \frac{\partial A}{\partial p^1} u_j^{n_j-l_3-t}, \dots, \mathrm{Im} \sum_{t=0}^{n_j-l_3} v_j^t \frac{\partial A}{\partial p^m} u_j^{n_j-l_3-t} \right)^T.
\end{gathered} \tag{3.17}$$

При использовании соотношений (3.17) для отыскания векторов $f(l_1)$, $g_j(l_2)$, $h_j(l_3)$ достаточно найти правые и левые собственные и присоединённые векторы чисто мнимых собственных значений, удовлетворяющие условиям нормировки (3.16), и производные $\partial A/\partial p^r$, $r = 1, \dots, m$, в точке $p = p_0$.

Аналогичные выражения можно получить и для векторов (3.9). Для этого в (3.17) вместо $f(l_1)$, $g_j(l_2)$, $h_j(l_3)$, u_j^t, v_j^t, n_0, n_j достаточно подставить $f^{rs}(l_1)$, $g_j^{rs}(l_2)$, $h_j^{rs}(l_3)$, u_{js}^t, v_{jr}^t, n_0', n_j', где $n_0' = \min(n_r(\lambda_0), n_s(\lambda_0))$, $n_j' = \min(n_r(\lambda_j), n_s(\lambda_j))$, а u_{jr}^t и v_{jr}^t, $t = 0, \dots, n_r(\lambda_j) - 1$, — правые и левые собственные и присоединённые векторы, соответствующие r-у жордановому блоку собственного значения λ_j. При этом условия нормировки для $u_{jr}^{t_1}, v_{jr}^{t_2}$ имеют вид (3.16), а для $u_{jr}^{t_1}, v_{js}^{t_2}$, $r \neq s$, имеют вид

$$v_{jr}^{n_r(\lambda_j)-1} u_{js}^{n_s(\lambda_j)-t} = 0, \quad t = 0, \dots, n_j', \quad j = 0, \dots, k.$$

Замечание 3. Теоремы 3 и 4 верны и в случае семейств комплексных матриц, зависящих от вектора действительных параметров, если векторы $g_j(l_1)$, $h_j(l_2)$ и $g_j^{rs}(l_1)$, $h_j^{rs}(l_2)$ определить отдельно для каждого чисто мнимого собственного значения матрицы A_0 (в том числе для нулевого и для каждого из комплексно сопряжённых, если таковые имеются) и исключить из (3.2), (3.10), (3.11) соотношения, содержащие векторы $f(l)$ и $f^{rs}(l)$.

Замечание 4. При рассмотрении семейств матриц общего положения [1–3] условие линейной независимости системы векторов в теореме 3 выполняется. Это связано с тем, что в случае общего положения коразмерность поверхности в $\mathbb{R}^m$ (страта), на которой матрицы $A(p)$ имеют такой же тип жордановой структуры чисто мнимых собственных значений, что и A_0, равна $d' = n_0 + 2n_1 + \ldots + 2n_k - k$ (количество параметров миниверсальной деформации, соответствующих чисто мнимым собственным значениям, минус количество ненулевых чисто мнимых собственных значений, величина которых на страте произвольна). На этой поверхности определено поле векторов (3.1) (по d' векторов в каждой точке). Условие линейной зависимости системы этих векторов определяет m уравнений, где компоненты одного вектора определяются как линейная комбинация соответствующих компонент других векторов с $(d'-1)$-м произвольным коэффициентом. Эти уравнения эквивалентны $(m-d'+1)$-у уравнению, не содержащему этих коэффициентов. Но так как размерность рассматриваемой поверхности равна $m-d'$ (меньше, чем количество уравнений), то в случае общего положения эти уравнения не имеют решения, то есть система векторов линейно независима. Аналогичное утверждение верно и в случае теоремы 4. Таким образом, теоремы 3 и 4 применимы для всех граничных точек области устойчивости семейства матриц общего положения.

Заключение

В настоящей работе найдены преобразования, приводящие комплексные и вещественные семейства матриц к нормальным формам (миниверсальным деформациям) в окрестности начального значения вектора параметров. Нахождение нормальной формы семейства матриц вместе с приводящими к ней преобразованиями представляет собой полную процедуру приведения к нормальной форме (1.2). Первым шагом в ней является приведение матрицы $A_0 = A(p_0)$ к жордановой форме (1.1) и определение по ней вида миниверсальной деформации $A'(p')$ [1–3]. Далее по теореме 1 или 2 последовательно находятся производные отображения $p' = \varphi(p)$ и семейств $C(p)$, $C^{-1}(p)$ по параметрам в точке $p = p_0$. На этом этапе используется рекуррентная процедура, состоящая из явных соотношений, содержащих лишь элементарные арифметические операции. С использованием полученных производных искомые функции $p' = \varphi(p)$, $C(p)$ и $C^{-1}(p)$ находятся в виде рядов Тейлора. Таким образом, приведение семейств матриц к нормальным формам становится удобной для численной реализации процедурой.

Спектр нормальной формы $A'(\varphi(p))$ совпадает со спектром самого семейства $A(p)$, но матрица A' при этом содержит малое количество ненулевых элементов. Это делает эффективным приложение нормальных форм (при знании преобразования $p' = \varphi(p)$) к исследованию различных свойств спектра семейства $A(p)$. В § 3 исследовалась область устойчивости семейства матриц в окрестности точки её границы. Для точки границы, соответствующей произвольному типу матрицы A_0, найдены части касательного конуса к области устойчивости. В случае, когда каждому чисто мнимому собственному значению матрицы A_0 соответствует одна жорданова клетка произвольного размера, касательные конусы найдены полностью. Оказалось, что касательный конус определяется правыми и левыми собственными и присоединёнными векторами чисто мнимых собственных значений и первыми производными матрицы по параметрам в данной точке границы. Соотношения, определяющие касательный конус, имеют простой вид, удобны для численных расчетов и могут быть использованы в различных прикладных задачах устойчивости.

Кроме областей устойчивости, с помощью приведения семейства матриц к нормальной форме можно исследовать локальные свойства спектрального радиуса, решать задачи о нахождении собственных значений возмущенной матрицы и т. д. При этом наиболее просто исследуются собственные значения, получающиеся при распаде кратного собственного значения матрицы A_0 с одной жордановой клеткой, поскольку они определяются как корни многочлена с известными из теоремы 1 коэффициентами.

Автор благодарит А. П. Сейраняна за внимание к работе и полезные советы.

Литература

[1] Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26, вып. 2. — С. 101–114.

[2] Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, вып. 5. — С. 119–184.

[3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[4] Галин Д. М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, вып. 1. — С. 241–242.

[5] Левантовский Л. В. О границе множества устойчивых матриц // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, вып. 2. — С. 213–214.

[6] Burke J. V., Overton M. L. Stable perturbations of nonsymmetric matrices // Linear Algebra and Appl. — 1992. — V. 171. — P. 249–273.

[7] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Особенности границ областей устойчивости // ПММ. — 1998. — Т. 62, вып. 6. — С. 984–995.

Статья поступила в редакцию в декабре 1997 г.