Федеральное агентство научных организаций

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики РАН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2016

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2017

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4
Н49

Издано по решению редакционно-издательского совета
ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»

Ответственные редакторы:
академик РАН *А. М. Сергеев,*
доктор физико-математических наук *А. В. Слюняев*

Организационно-финансовая поддержка:

- Федеральное агентство научных организаций;
- Министерство образования и науки Российской Федерации (мегагрант № 14.Z50.31.0007 «Лабораторные и численные исследования плазменных явлений в экстремальных астрофизических объектах», ведущий ученый Фукс Жулиан Соуля; № 14.Z50.31.0033 «Новые подходы к исследованиям климатических процессов и прогнозы экстремальных явлений», ведущий ученый Куртц Юрген Герберт Густав);
- Российский научный фонд (проект № 15-12-30021);
- Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 16-02-20129);
- Научно-производственное предприятие «ГИКОМ».

Нелинейные волны' 2016 / Федер. агентство науч. орг., Федер.
Н49 исслед. центр Ин-т приклад. физики РАН ; отв. ред. А. М. Сергеев, А. В. Слюняев. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2017. — 320 с.

ISBN 978-5-8048-0119-0

В сборник включены статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на XVII школе по нелинейным волнам (Нижний Новгород, февраль — март 2016 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты нелинейной науки — физика экстремальных световых полей, процессы в геофизике, в астрофизике и космологии, динамика вихрей в квантовых системах и гидродинамике, исследования нейросистем.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся изучением нелинейных явлений, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4

ISBN 978-5-8048-0119-0

© ИПФ РАН, 2017

ОПРОКИДЫВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ЛИНИЙ КАК ПРЕДТЕЧА КОЛМОГОРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Д. С. Агафонцев[1, 2], *Е. А. Кузнецов*[2, 3, 4], *А. А. Майлыбаев*[5]

[1] Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, г. Москва
[2] Новосибирский государственный университет
[3] Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, г. Москва
[4] Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Москва
[5] Национальный институт теоретической и прикладной математики, г. Рио-де-Жанейро, Бразилия

Введение

Несмотря на то что со времени классических работ Л. Ф. Ричардсона [1], А. Н. Колмогорова [2] и А. М. Обухова [3], посвященных гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, $\mathrm{Re} \gg 1$, прошло уже более 75 лет и достигнуто значительное понимание ее природы, проблема развитой турбулентности остается все еще до конца не решенной. Главная причина состоит в том, что развитая гидродинамическая турбулентность ни в каком варианте не может быть изучена с помощью теории возмущений, в отличие, например, от волновой турбулентности.

В волновой турбулентности есть два основополагающих фактора, определяющих динамику волновой системы: линейная дисперсия волн и нелинейность. Если дисперсионные эффекты превалируют над нелинейными, то в этом случае каждая волна с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ двигается долгое время свободно и только на больших расстояниях $L \gg k^{-1}$ начинает испытывать влияние других волн из-за нелинейности. Это основание для применения к такому ансамблю волн статистического описания на основе теории возмущений. В результате мы приходим к теории слабой (волновой) турбулентности, описывающей поведение ансамбля волн на языке кинетических уравнений для волнового действия, представляющего собой классический предел чисел заполнения. На этом пути удается продвинуться достаточно далеко, в частности найти спектры турбулентности как точные решения кинетических уравнений, получившие названия спектров Колмогорова — Захарова (см., например, [4]).

Эти решения характеризуются постоянным потоком энергии, числа частиц и т. д. Существенно, что данные решения не могут быть рассмотрены как термодинамически равновесные — они, как и спектр Колмогорова — Обухова для развитой гидродинамической турбулентности, реализуются в инерционном интервале — промежуточной области между накачкой и затуханием — и характеризуются конечным значением потока того или иного интеграла движения. С ростом амплитуды (т. е. с усилением нелинейности) главную роль начинают играть когерентные структуры в виде солитонов, бризеров, вихрей, для которых нелинейность компенси-

руется дисперсионными эффектами. Такие объекты иногда оказываются устойчивыми, часто — для интегрируемых моделей типа КДВ или НУШ. При этом турбулентность в интегрируемых моделях, получившая название интегрируемой, обладает рядом особенностей (см. недавнюю работу [5]). В случае неустойчивости когерентных структур типичным сценарием их нелинейного развития является коллапс — образование особенности за конечное время (см. обзор [6] и цитируемую там литературу). Классические примеры — самофокусировка света в средах с керровской нелинейностью и опрокидывание волн звукового типа.

Если говорить о гидродинамике Эйлера, которая описывает турбулентность в инерционном интервале, то она ни в каком пределе не может быть изучена пертурбативно. Ее гамильтониан, совпадающий с полной кинетической энергией жидкости, представляет собой гамильтониан взаимодействия (см., например, [7]). Таким образом, гидродинамика Эйлера есть система с предельно сильным нелинейным взаимодействием. Следует ожидать поэтому, что для развитой гидродинамической турбулентности когерентные структуры должны играть более существенную, а возможно — определяющую роль, нежели для волновой турбулентности. Нужно отметить, что проблема взаимодействия когерентных структур и хаотических компонент — одна из центральных в современной теории турбулентности.

Известно, что теория Колмогорова — Обухова [2, 3] описывает развитую гидродинамическую турбулентность в инерционном интервале масштабов — промежуточной области между длинноволновой накачкой и вязким затуханием. Размер этой области растет пропорционально $\mathrm{Re}^{3/4}$. В основе теории Колмогорова — Обухова лежат два важных предположения:

- турбулентность в инерционном интервале однородна и изотропна;
- нелинейное взаимодействие между флуктуациями является локальным.

Последнее означает, что взаимодействие между масштабами одного порядка превосходит взаимодействие между флуктуациями с сильно отличающимися масштабами. В случае стационарной турбулентности поведение системы определяется (постоянным) потоком энергии P из области накачки в область затухания (по сути, основано на свойстве локальности). Спектр турбулентности — так называемый колмогоровский спектр — имеет универсальное поведение, определяемое единственной величиной P. По этой причине с точностью до константы C_{K} (константы Колмогорова) спектр $E(k)$ может быть получен исходя из соображений размерности. По размерности спектр $E(k)$ представляет собой плотность энергии в фазовом пространстве, умноженную на $4\pi k^2$:

$$E(k) = 4\pi k^2 \frac{\rho c^2}{k^3} F\left(\frac{P}{\rho c^2 \cdot kc}\right),$$

где ρ — плотность (в дальнейшем равна 1), c — скорость света (введена из соображений удобства), а F — функция от безразмерного параметра $P/(\rho c^2 \cdot kc)$. Очевидно, что спектр $E(k)$ не должен зависеть от скорости света, отсюда функция $F(\xi) = C\xi^{2/3}$. В результате мы приходим к колмогоровскому спектру

$$E(k) = C_{\text{К}} P^{2/3} k^{-5/3}, \; C_{\text{К}} = 4\pi C.$$

Данный вывод принадлежит Р. З. Сагдееву, в этом выводе нет ничего, кроме соображений размерности. Из этих же соображений следует, что время перекачки энергии из энергосодержащих масштабов L в область диссипации конечно и определяется только L и P: $T \sim L^{2/3} P^{-1/3}$. Флуктуации скорости и завихренности $\boldsymbol{\omega} = [\nabla \times \mathbf{v}]$ на масштабе ℓ даются соответственно следующими соотношениями:

$$\langle \delta v \rangle \sim P^{1/3} \ell^{1/3}, \; \delta\omega \sim P^{1/3} \ell^{-2/3}.$$

Таким образом, для флуктуаций ω мы имеем особенность при $\ell \to 0$ и конечном времени перекачки T, что указывает на возможность коллапса в трехмерной гидродинамике Эйлера.

1. Представление вихревых линий

В сжимаемой гидродинамике (газодинамике) появление особенности за конечное время (коллапс) хорошо известно, оно обязано опрокидыванию. В этом случае одна «жидкая» частица догоняет другую частицу, в результате чего происходит формирование бесконечных градиентов для характеристик газа — плотности и скорости. Главная причина опрокидывания связана со сжимаемостью газа. С математической точки зрения этот процесс представляет собой формирование складки, что может быть описано на языке отображений, в данном случае отвечающих переходу от эйлерова описания к лагранжеву. Особенность возникает в точке обращения якобиана данного отображения в ноль. В несжимаемой гидродинамике — гидродинамике Эйлера, казалось бы, нет причины для опрокидывания, поскольку якобиан преобразования от эйлерова описания к лагражеву в силу несжимаемости тождественно равен 1. Несмотря на это, в несжимаемой гидродинамике есть сжимаемые объекты — непрерывно распределенные вихревые линии, что следует из простого наблюдения.

Рассмотрим уравнения движения завихренности $\boldsymbol{\omega} = [\nabla \times \mathbf{v}]$ идеальной жидкости, так называемые уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot}\,[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}], \; \text{div}\,\mathbf{v} = 0. \qquad (1)$$

В силу векторного произведения только компонента скорости, нормальная к вихревой линии, $\mathbf{v}_n$, может изменить $\boldsymbol{\omega}$. При этом в ситуации общего положения div $\mathbf{v}_n \neq 0$, что является причиной сжимаемости непрерывно рас-

пределенных вихревых линий [9, 10]. Компонента скорости, параллельная завихренности, не меняет завихренность, обеспечивая несжимаемость для полной скорости, div $\mathbf{v} = 0$.

Отметим, что уравнение (1) часто называют уравнением вмороженности. На самом деле вмороженность есть свойство этого уравнения, которое гласит, что всякая жидкая частица приклеена к своей вихревой линии и двигается вместе с ней.

У частицы, таким образом, имеется только одна «свобода» — движение вдоль вихревой линии, которое, очевидно, не меняет завихренность. Поэтому $\mathbf{v}_n$ есть скорость самой вихревой линии. Это утверждение имеет простое геометрическое объяснение. Всякая деформация вдоль произвольной линии не изменяет ее — только поперечные деформации приводят к ее перемещению. Поэтому движение вихревой линии определяется скоростью $\mathbf{v}_n$, находится из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для «новых» лагранжевых траекторий:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t) \text{ при } \mathbf{r}(t=0) = \mathbf{a}, \tag{2}$$

и это решение задает сжимаемое отображение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$. Последнее есть следствие формулы Лиувилля, примененной к этому уравнению,

$$\frac{dJ}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}_n \cdot J, \tag{3}$$

где J — якобиан отображения. В силу div $\mathbf{v}_n \neq 0$ на величину J не накладывается никаких ограничений: якобиан может принимать произвольные значения, в том числе и нулевые. Уравнение (1) в терминах этого отображения допускает интегрирование:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})\nabla_a)\mathbf{r}}{J}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ — начальное значение завихренности, которое имеет смысл инвариантов Коши (см., например, [7]).

Уравнения (4) и (2) вместе с условием несжимаемости div $\mathbf{v} = 0$ образуют замкнутую систему представления вихревых линий (ПВЛ), впервые введенного в работе [9] (см. также [8, 10]).

Позднее стало ясно, что существование сжимаемых распределений для бездивергентных полей присуще всем вмороженным полям (магнитное поле в идеальной МГД [15], ротор завихренности для двумерных течений — di-vorticity [16] и т. д.).

Поскольку завихренность в (4) в знаменателе содержит J, который принимает произвольные значения, то вероятность коллапса обеспечивает обращение якобиана J в ноль, что в ситуации общего положения может возникнуть сначала в отдельной точке. Такой сценарий оказался возможным для трехмерной интегрируемой гидродинамики [9, 11]. Трехмерная

интегрируемая гидродинамика получается из идеальной гидродинамики Эйлера в приближении локальной индукции. Эти уравнения интегрируются с помощью ПВЛ, в результате чего выясняется, что каждая вихревая нить представляет собой автономный объект, не взаимодействующий со всеми другими, но со своей нелинейной динамикой, которая описывается с помощью интегрируемого уравнения Ландау — Лифшица. Являясь свободной, каждая вихревая линия может догонять другую линию, т. е. происходит опрокидывание вихревых линий. Как результат, в некоторой точке за конечное время якобиан ПВЛ обращается в ноль, что приводит к появлению особенности для завихренности. Опрокидывание вихревых линий в трехмерной интегрируемой гидродинамике происходит благодаря сжимаемости вихревых линий, несмотря на несжимаемость потока [11].

Отметим, что до сих пор вопрос о коллапсе для гидродинамики Эйлера остается дискуссионным, несмотря на большое количество численных и точных аналитических результатов (см. обзоры [12, 13] и цитируемую там литературу). От решения проблемы «есть коллапс или его нет» зависит наше понимание природы развитой гидродинамической турбулентности.

Основной вывод, который можно сделать исходя из сказанного, состоит в том, что в гидродинамике Эйлера существуют сжимаемые объекты — это поле непрерывно распределенных вихревых линий. Интуитивно ясно, что сжимаемость вихревых линий должна обеспечивать появление структур типа ударных волн, которые вначале возникают из-за опрокидывания в отдельной точке, а затем область опрокидывания расширяется, приводя к формированию каустики. Именно такие структуры — структуры блинного типа — наблюдаются в наших численных экспериментах [17—19]. Следует отметить, что впервые структуры такого типа наблюдались в численных экспериментах М. Браше с соавторами (1992) [20].

Данная статья представляет собой обзор последних результатов, полученных нами в этом направлении. Основное внимание в статье уделяется численным результатам по моделированию процессов зарождения развитой ($\mathrm{Re} \gg 1$) турбулентности в рамках уравнений Эйлера.

2. Численное моделирование

Вначале нужно сказать несколько слов об уравнениях, решаемых численно, и применяемых численных схемах. В численных экспериментах мы использовали прямое интегрирование уравнений Эйлера в терминах завихренности, т. е. уравнений (1), а также интегрирование уравнений Эйлера в представлении вихревых линий — формулы (2) и (4), которые были переписаны в эйлеровом представлении. Последнее означает, что рассматривалось не прямое отображение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, а обратное $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, для которого уравнения движения в соответствии с (2) записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla)\, \mathbf{a} = 0. \qquad (5)$$

Соотношение (4) в терминах $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ переписывается как

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_{0\alpha}(\mathbf{a})[\nabla a_\beta \times \nabla a_\gamma]. \qquad (6)$$

Уравнения (1), а также (5), (6) численно интегрировались в периодическом ящике $\mathbf{r} = (x, y, z) \in [-\pi, \pi]^3$ с использованием псевдоспектрального метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Чтобы избежать влияния неустойчивости на больших волновых числах (bottle-neck instability), использовалась фильтрация в фурье-пространстве на каждом шаге по времени с помощью функции отсечения, предложенной в работе [14],

$$\rho(\mathbf{k}) = \exp\left(-36 \sum_{j=x,y,z} (k_j / K_{\max}^{(j)})^{36}\right), \qquad (7)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, $K_{\max}^{(j)} = N_j / 2$ — максимальные волновые числа и N_j — числа узлов решетки вдоль направлений $j = x, y, z$, причем $|k_j| \le K_{\max}^{(j)}$. Функция (7) отсекает примерно 20 % спектра по краям спектрального пространства в каждом из трех направлений. Обратный оператор ротора в уравнении (1) вычислялся в фурье-пространстве (см., например, [17]). Адаптивный шаг по времени определялся с помощью критерия устойчивости CFL (Куранта — Фридрихса — Леви) с числом Куранта 0,5.

Мы использовали адаптивную анизотропную прямоугольную решетку, которая является однородной в каждом направлении и подстраивается независимо вдоль каждой из трех координат. Алгоритм адаптации происходит от стандартного правила деалиасинга, оптимизированного для квадратичной нелинейности уравнений Эйлера. На малых временах фурье-спектр решения сосредоточен на малых гармониках, тогда как высшие гармоники содержат численный шум. Мы отслеживали границу «сигнал — шум» до тех пор, пока она не достигнет $2K_{\max}^{(j)}/3$ по любому из трех направлений $j = x, y, z$ (детали см. в [17]). Затем решетку переопределяли вдоль соответствующего направления, используя фурье-интерполяцию, которая имеет ошибку, сравнимую с ошибкой округления. Пока моделирование выполняется таким образом, ошибка алиасинга исключается, а влияние фурье-фильтрации (7) на «содержащие сигнал» гармоники пренебрежимо мало.

Все наши численные эксперименты начинались на кубической решетке 128^3. Когда общее число узлов достигало 1024^3, мы продолжали эксперимент на фиксированной решетке до тех пор, пока фурье-спектр завихренности на $2K_{\max}^{(j)}/3$ не превысит 10^{-13} от своего максимального значения вдоль любого из трех направлений j (см. [17]).

Начальные условия для всех численных экспериментов выбирались в виде сдвигового течения $v_x = \sin z$; $v_y = \cos z$ (вырожденное *ABC*-течение)

и случайных возмущений, спектр которых был сосредоточен в области малых волновых чисел. Мы изменяли соотношение между регулярной (*ABC*-течение) и случайной компонентами. В первых двух экспериментах [17] это соотношение (по энергии) было порядка единицы. В последующих экспериментах [18] это соотношение изменялось в широких границах.

3. Численные результаты

Во всех численных экспериментах мы наблюдали формирование структур блинного типа (вихревых слоев), толщины которых значительно меньше продольных размеров блина. Все эти структуры представляют собой области повышенной завихренности. Для каждой такой структуры можно определить ее размеры с помощью разложения вблизи локального максимума завихренности $\omega_{\max}$:

$$|\boldsymbol{\omega}| = \omega_{\max} + \frac{1}{2} H_{ij}\, \Delta X_i\, \Delta X_j\,, \tag{8}$$

где $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\max}$. В этом случае собственные значения λ_n матрицы вторых производных $H_{ij} = \partial_i \partial_j\, |\boldsymbol{\omega}|$, вычисленных в локальном максимуме завихренности, будут определять характерные размеры структуры: $\ell_n = \sqrt{2\omega_{\max} / |\lambda_n|}$. Максимальное значение $|\lambda_1|$ ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$) задает толщину блина, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, — направление нормали к структуре типа блина. В собственных осях H_{ij} разложение (8) записывается в виде

$$|\boldsymbol{\omega}| = \omega_{\max} \left(1 - \sum_{n=1,2,3} \frac{a_n^2}{\ell_n^2} \right).$$

Следует отметить, что численное определение локальных максимумов завихренности является нетривиальной задачей из-за специфической геометрии блинообразных структур (соответствующие методы описаны в [17]).

В данном разделе мы приведем результаты численных экспериментов только для одних начальных условий (н. у.), помеченных в работе [17] как I_1. Для этих н. у. соотношение между регулярной (*ABC*-течение) и случайной компонентами было порядка единицы. В работе [17] были представлены результаты формирования структур блинного типа для максимального времени счета $t_{m1} = 6{,}89$ с максимальной решеткой $486 \times 1024 \times 2048$. В работе [19] для тех же начальных условий достигнуто максимальное время $t_{m2} = 7{,}75$ с решеткой $972 \times 2048 \times 4096$, в восемь раз большей по сравнению с решеткой в работе [17]. Для каждого из двух экспериментов разрешение решетки соответствовало 10—12 точкам по толщине самого тонкого блина (на уровне полумаксимума).

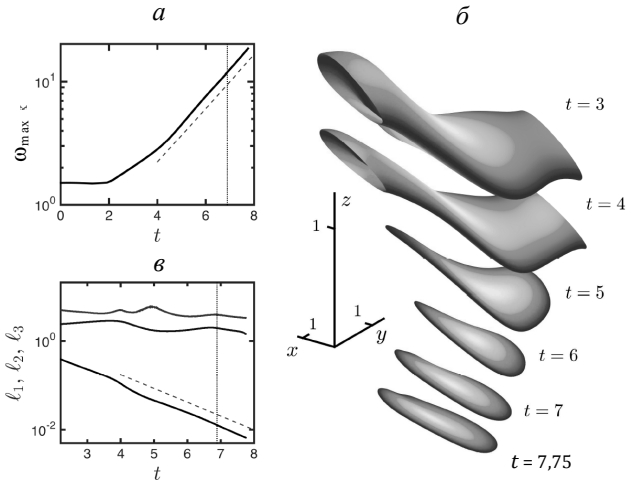

Рис. 1. Глобальный максимум завихренности как функция времени (*а*): по вертикали логарифмическая шкала; пунктирная линия показывает наклон, пропорциональный $e^{\beta_2 t}$, с $\beta_2 = 0{,}5$; тонкая вертикальная линия отвечает максимальному времени моделирования $t_{m1} = 6{,}89$ [17]. Поведение модуля завихренности $\omega \geq 0{,}85\omega_{max}$ в разные моменты времени (*б*); различные оттенки черного цвета представляют собой величины завихренности в средней плоскости блина: от темного для $0{,}85\omega_{max}(t)$ до светлого для ω_{max}; структуры сдвинуты по вертикали для лучшей визуализации. Характерные пространственные масштабы ℓ_1 (верхняя кривая), ℓ_2 (средняя кривая) и ℓ_3 (нижняя кривая) как функции времени (*в*); пунктирная линия указывает на наклон, пропорциональный $e^{-\beta_1 t}$, с $\beta_1 = 0{,}74$

На рисунке 1 представлена эволюция структуры, соответствующей глобальному максимуму завихренности. Из этих данных можно видеть, что область повышенной завихренности (рис. 1, *б*) представляет собой сжимающуюся в одном направлении структуру типа блина с растущей завихренностью. Толщина блина уменьшается экспоненциально с декрементом β_1 (рис. 1, *в*). Другие два размера изменяются незначительно. Максимальная завихреность растет экспоненциально со временем с инкрементом β_2 (рис. 1, *а*). Отношение показателей $\beta_2/\beta_1 \approx 2/3$. Таким образом, между максимальной завихренностью ω_{max} и толщиной блина ℓ_1 возникает следущее соотношение колмогоровского типа:

$$\omega_{max}(t) \sim \ell_1(t)^{-2/3}.$$

Этот результат был вначале получен численно в работе [17], а затем подтвержден для бóльшего интервала времени в работе [19].

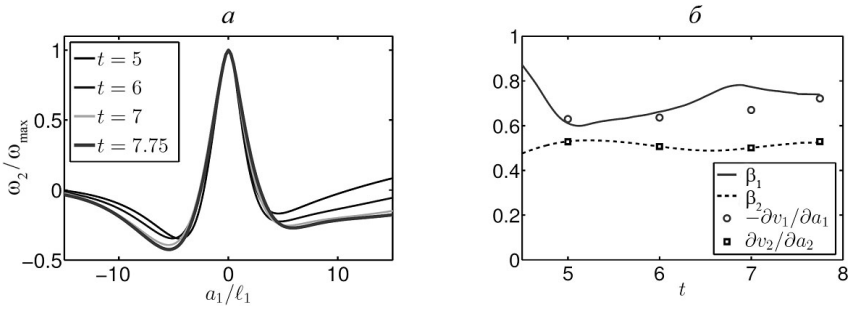

Рис. 2. Нормированная компонента завихренности ω_2 / ω_{max} как функция автомодельной переменной $\xi = a_1 / \ell_1$ в разные моменты времени (*а*): t у кривых растет сверху вниз. Сравнение логарифмических производных $\beta_1 = -\dot{\ell}_1 / \ell_1$ и $\beta_2 = \dot{\omega}_{max} / \omega_{max}$ с градиентами скорости $-\partial v_1/\partial a_1$ и $\partial v_2/\partial a_2$, полученными численно в точке глобального максимума завихренности (*б*)

Численное моделирование показывает, что вектор завихренности в основном лежит в плоскости блина ($\|\mathbf{n_2}$). Другие компоненты завихренности оказываются малыми. Рисунок 2, *а* дает представление, как изменяется при прохождении глобального максимума завихренности компонента ω_2, нормированная на максимальное значение завихренности ω_{max}, в зависимости от координаты a_1 вдоль нормали к блину. С хорошей точностью эта зависимость демонстрирует автомодельное поведение.

3.1. Точное решение уравнений Эйлера как модель эволюции блинообразных структур

Для описания эволюции блинных структур было найдено точное решение уравнений Эйлера [19]. Пусть в декартовой системе $\mathbf{a} = a_1\mathbf{n}_1 + a_2\mathbf{n}_2 + a_3\mathbf{n}_3$ завихренность зависит только от a_1 и имеет одну компоненту, параллельную оси a_2. Тогда уравнение (1) допускает следующее решение:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}, t) = \omega_2\mathbf{n}_2, \quad \omega_2 = \Omega(t) f'\left(\frac{a_1}{\ell_1(t)}\right), \tag{9}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, t) = -\Omega(t)\ell_1(t) f\left(\frac{a_1}{\ell_1(t)}\right)\mathbf{n}_3 + \begin{pmatrix} -\beta_1(t)a_1 \\ \beta_2(t)a_2 \\ \beta_3(t)a_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $\Omega(t)$ есть амплитуда завихренности, $\ell_1(t)$ — толщина блина, $f(\xi)$, зависящая от автомодельной переменной $\xi = a_1/\ell_1(t)$, является произ-

вольной функцией. Параметры $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ и $\beta_3(t)$, определяющие растягивающее поле скорости при больших a, имеют вид

$$\beta_1 = -\dot{\ell}_1/\ell_1, \quad \beta_2 = \dot{\Omega}/\Omega, \quad -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \tag{11}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Скорость (10) представляет собой суперпозицию сдвигового течения $-\Omega\ell_1 f(a_1/\ell_1)\mathbf{n}_3$ и асимметричного потенциального растягивающего течения $(-\beta_1 a_1, \beta_2 a_2, \beta_3 a_3)$. Давление в этом случае задается выражением, определяемым только параметрами β_i:

$$p = p_0 + (\dot{\beta}_1 - \beta_1^2)\frac{a_1^2}{2} - (\dot{\beta}_2 + \beta_2^2)\frac{a_2^2}{2} - (\dot{\beta}_3 + \beta_3^2)\frac{a_3^2}{2}. \tag{12}$$

Данное решение представляет собой обобщение решения, найденного в частном случае в работе [20]: $\Omega = \ell_1^{-1} = \mathrm{e}^{t/T}$, $\beta_{1,2} = 1/T$, $\beta_3 = 0$.

Следует отметить, что распределение (9)—(12) имеет бесконечную энергию в $\mathbf{R}^3$. В частности, ввиду произвольности $\Omega(t)$ и $\ell_1(t)$ легко находится решение, приводящее к появлению особенности за конечное время. Найденное новое решение, помимо произвольной функции $f(\xi)$, характеризуется безразмерным параметром асимметрии растягивающего потока

$$\sigma = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_2 + \beta_3} = \frac{2\beta_2}{\beta_1} - 1. \tag{13}$$

В наших численных экспериментах наблюдается почти экспоненциальное поведение для $\Omega(t)$ и для толщины $\ell_1(t)$ (см. рис. 1, *а*, *в*), что соответствует постоянным значениям β_1, β_2 и β_3. В этом случае параметр асимметрии определяет степенной закон между амплитудой завихренности и толщиной $\ell_1(t)$:

$$\Omega(t) \propto \ell_1(t)^{-\varsigma}, \quad \varsigma = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\sigma + 1}{2}. \tag{14}$$

В поперечном направлении для данного решения вариация скорости в плоскости блина на масштабе ℓ_1 ведет себя как $\delta v_3 \propto \Omega\ell_1 \propto \ell_1^{1-\varsigma}$. Эта вариация стремится к нулю при $\ell_1 \to 0$ и $\varsigma < 1$.

Следует отметить, что анзац (9)—(12) может быть применен и в случае уравнения Навье — Стокса, если считать функцию f зависящей также от времени. В этом случае f определяется из уравнения $f_t - \frac{\nu}{\ell_1^2} f_{\varsigma\varsigma} = 0$, где ν — коэффициент вязкости. После простой замены это уравнение сводится к уравнению теплопроводности. В случае осесимметричных течений

($\beta_2 = \beta_3 = \beta_1/2$) данное решение переходит в решение в виде вихря Лундгрена [21].

В работе [19] было проверено, что решение (9)—(12) хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Мы провели несколько проверок. Как это видно из рис. 2, *а*, автомодельная зависимость $f(\xi)$ (вдоль оси a_1) хорошо согласуется с решением. Область автомодельности при больших ξ должна сшиваться с основным течением. Важно отметить, что функция $f(\xi)$ не является универсальной, она меняется при переходе от одного блина к другому, а также при изменении начальных условий.

Другой тест связан со сравнением градиентов скорости. Для решения (9)—(12)

$$\left[\partial v_i/\partial a_j\right] = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

На рисунке 2, *б* представлено сравнение при разных временах логарифмических производных $\beta_1 = -\dot{\ell}_1/\ell_1$ и $\beta_2 = \dot{\omega}_{\max}/\omega_{\max}$ с градиентами скорости $-\partial v_1/\partial a_1$ и $\partial v_2/\partial a_2$, найденными в точке глобального максимума завихренности. Можно видеть очень хорошее общее согласие, за исключением большего отклонения для $-\partial v_1/\partial a_1$ при t = 7. Это отклонение может быть связано с изменением (до 20 %) производной скорости в пределах толщины блина. В заключительный момент времени t_{m2} = 7,75 в точке глобального максимума завихренности численно градиент скорости равен

$$\left[\partial v_i/\partial a_j\right]_{\mathbf{a}=0} = \begin{pmatrix} -0,72 & 0,04 & -0,03 \\ -0,11 & 0,53 & -0,09 \\ -18,42 & -0,04 & 0,19 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

откуда видно, что имеется единственная большая компонента (3, 1), $\partial v_3/\partial a_1 \approx -\omega_{\max}$. Диагональные элементы очень хорошо согласуются с параметрами $-\beta_1 = -0,74$, $\beta_2 = 0,53$ и $\beta_3 = 0,21$, в то время как все оставшиеся компоненты: (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3) и (3, 2) — оказываются малыми.

Таким образом, в области максимума завихренности численное моделирование дает очень хорошее согласие с точным решением. При больших расстояниях вдоль вихревого слоя его нормаль поворачивается (см. рис. 1, *б*) и согласие с точным решением нарушается. В действительности в каждой точке вихревого слоя при введении соответствующей системы координат, ориентированной по нормали, точное решение локально хорошо согласуется с численным результатом моделирования.

Решение (9)—(12) не определяет связи между параметрами β_1 и β_2, которые в численном эксперименте приводят к зависимости колмогоровского типа между максимальной завихренностью и толщиной вихревого слоя,

$$\omega_{\max}(t) \sim \ell_1(t)^{-\varsigma}, \quad \varsigma \approx 2/3. \tag{17}$$

По нашему мнению, параметр ς должен определяться исходя из сшивки точного решения (9)—(12) с областью, по размеру значительно превышающей толщину вихревого слоя, т. е. нелокальным образом. Этот вопрос пока остается открытым.

К сказанному следует добавить, что поведение завихрености во всех локальных максимумах удовлетворительно укладывается на зависимость $2/3$ для наклона на логарифмической плоскости ($\omega_{\max}(t)$, ℓ_1) (рис. 3).

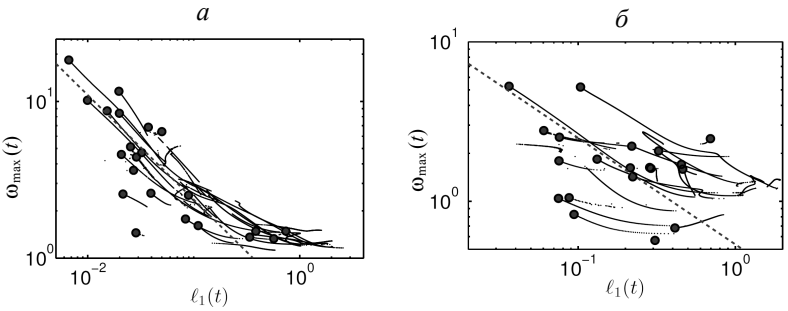

Рис. 3. *а* — Соотношение между локальными максимумами завихренности $\omega_{\max}(t)$ и соответствующими характерными толщинами $\ell_1(t)$. Линии показывают эволюцию максимумов, жирные точки соответствуют времени t_{m2}. Пунктирная линия соответствует степенному закону $\omega_{\max} \propto \ell_1^{-2/3}$. *б* — Такой же график для других случайных начальных условий с финальной решеткой $1152 \times 972 \times 864$ (с меньшим пространственным разрешением)

3.2. Сжимаемость отображения ПВЛ

В данном разделе мы приведем результаты численного моделирования уравнений Эйлера в представлении вихревых линий, т. е. в рамках уравнений (5) и (6).

Как отмечалось ранее, представление вихревых линий указывает на сжимаемость вихревых линий. Причем в силу (4) поведение завихренности существенно зависит от якобиана J. Особенно эта корреляция должна проявляться при уменьшении J и, соответственно, росте завихренности в ее максимальной точке. На рисунке 4 представлена зависимость от времени минимума якобиана (с хорошей точностью соответствует максимуму завихренности) для н. у. I_2 [17]. Логарифмическая шкала показывает, что

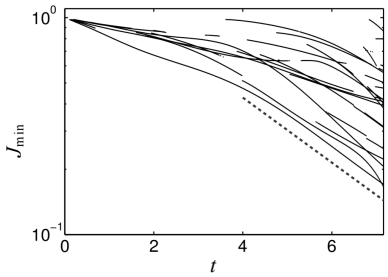

Рис. 4. Эволюция в логарифмической шкале локальных минимумов якобиана. Пунктирная линия соответствует наклону, пропорциональному e^{-t/T_J}, $T_J = 2,9$

$J_{\min} \propto e^{-t/T_J}$ с $T_J \approx 2,9$. Это значение практически совпадает со временем нарастания максимальной завихренности $T_\omega \approx 2,7$. Вычисления в рамках ПВЛ также хорошо соотносятся с прямым интегрированием уравнений Эйлера. На рисунке 5 представлены две зависимости — логарифмической производной максимальной завихренности $d/dt[\log \omega_{\max}]$ и вычисленной в точке максимума завихренности дивергенции нормальной компоненты скорости, взятой со знаком минус, –div $\mathbf{v}_n$. Согласно (3) последняя величина есть логарифмическая производная якобиана с соответствующим знаком. Обе эти зависимости сильно взаимно коррелируют. Данные численные результаты показывают, что формирование структур блинного типа обязано сжимаемости вихревых линий. При этом минимуму якобиана соответствует максимум завихренности.

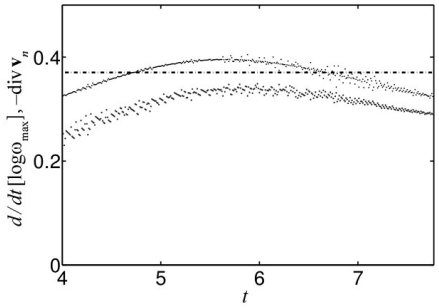

Рис. 5. Эволюция логарифмической производной $d/dt[\log \omega_{\max}]$ (верхняя линия) и –div $\mathbf{v}_n$ (нижняя линия), вычисленных в точке глобального максимума завихренности. Штрихпунктирная прямая линия соответствует инкременту $1/T_\omega$ роста $\omega_{\max}$, где $T_\omega \approx 2,7$

3.3. Спектры турбулентности

В настоящее время в численных экспериментах мы наблюдаем формирование структур блинного типа для всех рассматриваемых начальных условий (более 30) [17—19]. В ходе эволюции всех таких структур с высокой завихренностью выполняется в той или иной степени соотношение колмогоровского типа $\omega_{\max}(t) \sim \ell(t)^{-2/3}$. В нашей первой работе [17] пока-

зано, что блины в x-пространстве порождают сильно анизотропные распределения в k-пространстве в виде джетов, вытянутых в направлениях, перпендикулярных блинам (рис. 6). Поскольку при эволюции блинов их толщина уменьшается, то, соответственно, анизотропия джетов растет со временем. Из-за этого мгновенный спектр турбулентности оказывается сильно изрезанным и анизотропным. Число структур блинного типа увеличивается, и, соответственно, растет число джетов. Каждый из джетов имеет свое угловое распределение порядка $(kL)^{-1}$, где L — характерный продольный размер блина. С увеличением количества джеты начинают перекрываться в k-пространстве. Когда таких перекрытий достаточно много, в этих областях происходит формирование колмогоровского спектра $E(k) \sim k^{-5/3}$ (рис. 7). Начальные условия IC_1 [18] не содержат никакой начальной анизотропии. По этой причине после усреднения по углу колмогоровский спектр не наблюдается. Начальные условия IC_2 и IC_3 представляют собой суперпозицию сдвигового течения (вырожденное ABC-течение)

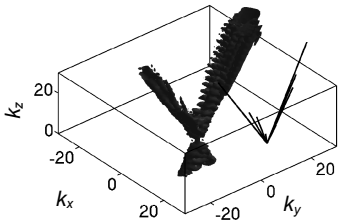

Рис. 6. Изоповерхности модуля Фурье амплитуд завихренности (нормированных на максимальное значение) $|\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})| = 0{,}2$ в $\boldsymbol{k}$-пространстве при t_{m1}. Сплошные линии показывают максимальные k-векторы (нормированные на ℓ_1^{-1} для всех джетов)

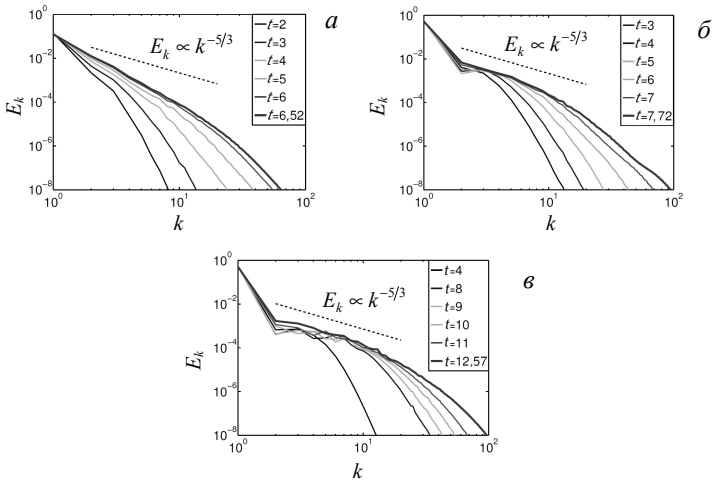

Рис. 7. Спектр энергии $E_k(t)$ в разные моменты времени для н. у. [18] IC_1 (тип I) (*а*), IC_2 (тип II) (*б*) и IC_3 (тип III) (*в*). Время у кривых растет снизу вверх

и изотропного гауссова шума. Анизотропия, порождаемая сдвиговым течением, обусловливает появление джетов с сильным угловым перекрытием, благодаря чему формируется колмогоровский спектр. Следует подчеркнуть, что неусредненный по углу спектр оказывается сильно анизотропным. Таким образом, несмотря на колмогоровское поведение спектра, турбулентность в условно инерционном интервале далека от изотропной и однородной, по крайней мере для времен численного эксперимента.

Заключение

В данной работе на основе представления вихревых линий, точного решения и прямого численного интегрирования уравнений Эйлера показано следующее:

- на стадии возбуждения спектр турбулентности в инерционном интервале далек от изотропного;
- основной вклад в спектр связан с появлением когерентных структур в виде блинов, которым в спектре турбулентности соответствуют джеты с растущей со временем анизотропией;
- максимальная завихренность в блине и его ширина ℓ связаны универсальным соотношением колмогоровского типа $\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}$, при этом рост завихренности и сужение структур блинного типа зависят от времени экспоненциально, без какой-либо тенденции к взрывному поведению;
- найденное точное решение уравнений Эйлера хорошо согласуется с численным моделированием в области блина;
- зарождение и развитие структур блинного типа является следствием сжимаемости вихревых линий;
- наблюдаемое увеличение числа таких структур приводит к формированию колмогоровского спектра для полностью невязких течений.

Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 17-01-00622). Численные эксперименты выполнялись в Новосибирском суперкомпьютерном центре (НГУ) и информационном центре Института фундаментальной и прикладной математики (IMPA, Рио-де-Жанейро). Д. С. Агафонцев благодарен за поддержку со стороны IMPA во время визитов в Бразилию.

Литература

1. *Richardson, L. F.* Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph // Proc. R. Soc. London. Ser. A. — 1926. — V. 110. — P. 709—737.

2. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемых вязких жидкостях при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30. — С. 299—303.

3. *Обухов, А. М.* Спектральное распределение энергии в турбулентном потоке // ДАН СССР. — 1941. — Т. 32. — С. 22—24.

4. *Zakharov, V. E.* Kolmogorov Spectra of Turbulence. I. Wave Turbulence / V. E. Zakharov, V. S. Lvov, G. E. Falkovich. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992. — (Series in nonlinear dynamics).

5. *Agafontsev, D. S.* Integrable turbulence and formation of rogue waves / D. S. Agafontsev, V. E. Zakharov // Nonlinearity. — 2015. — V. 28. — P. 2791.

6. *Захаров, В. Е.* Солитоны и коллапсы — два сценария эволюции нелинейных волновых систем / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // УФН. — 2012. — Т. 182. — С. 569—592.

7. *Захаров, В. Е.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // УФН. — 1997. — Т. 167. — С. 1137—1168.

8. *Kuznetsov, E. A.* Vortex line representation for the hydrodynamic type equations // J. Nonl. Math. Phys. — 2006. — V. 13. — P. 64—80.

9. *Кузнецов, Е. А.* Гамильтонова динамика вихревых линий в системах гидродинамического типа / Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан // Письма в ЖЭТФ. — 1998. — Т. 67. — С. 1015—1020.

10. *Кузнецов, Е. А.* Представление вихревых линий для идеальных и вязких жидкостей // Письма в ЖЭТФ. — 2002. — Т. 76. — С. 406—410.

11. *Кузнецов, Е. А.* Коллапс вихревых линий в гидродинамике / Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан // ЖЭТФ. — 2000. — Т. 118. — С. 853—876.

12. *Chae, D.* Incompressible Euler Equations: the blow-up problem and related results // Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equation / Eds. C. M. Dafermos and M. Pokorny. — Elsevier, 2008. — V. 4. — P. 1—55.

13. *Gibbon, J. D.* The three-dimensional Euler equations: Where do we stand? // Physica D. — 2008. — V. 237, № 14—17. — P. 1894—1904.

14. *Hou, T. Y.* Computing nearly singular solutions using pseudo-spectral methods / T. Y. Hou, R. Li // J. Comp. Phys. — 2007. — V. 226, № 1. — P. 379—397.

15. *Kuznetsov, E. A.* Compressible dynamics of magnetic field lines for incompressible MHD flows / E. A. Kuznetsov, T. Passot, P. L. Sulem // Phys. Plasmas. — 2004. — V. 11. — P. 1410—1415.

16. *Kuznetsov, E. A.* Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, J. J. Rasmussen // Phys. Fluids. — 2007. — V. 19. — P. 105110.

17. *Agafontsev, D. S.* Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations / D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev // Phys. Fluids. — 2015. — V. 27. — Art. 085102 ; arXiv:1502.01562.

18. *Агафонцев, Д. С.* Развитие структур развитой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий / Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев // Письма в ЖЭТФ. — 2016. — Т. 104. — С. 695—700.

19. *Agafontsev, D. S.* Asymptotic solution for high vorticity regions in incompressible 3D Euler equations / D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev // J. Fluid Mech. — 2017. — V. 813. — R1-1—R1-10. — doi:10.1017/jfm.2017.1 ; arXiv:1609.07782.

20. *Brachet, M. E.* Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, P. L. Sulem // Phys. Fluids. — 1992. — V. A 4. — P. 2845—2854.

21. *Lundgren, T. S.* Strained spiral vortex model for turbulent fine structure // Phys. Fluids. — 1982. — V. 25. — P. 2193.

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2016

Утверждено к печати ФИЦ «Институт прикладной физики РАН».
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

Редактор *И. А. Кокорина*
Верстка *М. В. Башевой, А. А. Ереминой*
Технический редактор *Д. П. Семенова*

Подписано к печати 25.04.2017 г.
Формат $60 \times 90\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 19,6. Темплан 2017 г. Поз. 1. Тираж 200 экз.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГУП ППП «Типография “Наука”», АИЦ РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6

Заказ №